

1900.

N. 11.

ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. FÖGGENDORFF, G. UND E. WIEDENMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 3. HEFT 3.

DER GANZEN REIHE 308. BANDES 3. HEFT.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL DRUDE.



LEIPZIG, 1900.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIVS BARTH.

*Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den
Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in
12 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 36 M.*

(Ausgegeben am 15. November 1900.)

I n h a l t.

	Seite
1. P. Drude. Zur Elektronentheorie der Metalle. II. Theil . . .	369
2. A. Rietzsch. Ueber die thermische und elektrische Leitfähigkeit von Kupfer-Phosphor und Kupfer-Arsen	403
3. K. T. Fischer. Ein neues Barometer (Luftdruckariometer) . . .	428
4. K. R. Johnson. Beiträge zur Kenntniss der Vorgänge in Inductionsapparaten	438
5. K. R. Johnson. Constanz oder Inconstanz des Funkenpotentials . .	461
6. J. R. Banton. Abhängigkeit des specifischen Torsionswiderstandes einiger Metalldrähte von der Spannung	471
7. J. Stark. Methode der Querströme und die Leitfähigkeit in durchströmten Gasen	492
8. E. Lecher. Ueber unipolare Induction und den Pohl'schen Versuch	513
9. H. Lorberg. Einige Bemerkungen zu zwei Aufsätzen von Lecher und König	522
10. W. Wien. Zur Theorie der Strahlung schwarzer Körper. Kritisches	530
11. P. S. Wedell-Wedellsborg. Notiz über die Ursachen der secularen Variationen des Erdmagnetismus	540
12. J. v. Pallich. Eine einfache Modification des Wehnelt'schen Unterbrechers	543

Manuscripte sind an den Herausgeber, Professor Dr. P. Drude, zu senden. Seine Adresse ist Giessen, Nährungsberg 8.

Es wird gebeten, die Manuscripte druckfertig einzuliefern und in den Correcturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuscript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuscripts recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Citate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuscripts (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muss dies bei Rücksendung des ersten Correcturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mittheilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Uebersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaction und Verlagsbuchhandlung gestattet.

55



ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 3.

1. Zur Elektronentheorie der Metalle; von P. Drude.

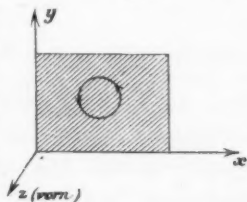
II. Teil.

Galvanomagnetische und thermomagnetische Effecte.

1. Die Ausgangsgleichungen.

Ich knüpfe an an die Vorstellungen, Resultate und Bezeichnungen des ersten Theiles meiner Arbeit.¹⁾ Hinweise auf diese Arbeit werden im Folgenden mit I, p ... bezeichnet werden.

Es sei eine rechtwinklige Metallplatte in ein homogenes Magnetfeld der Stärke \mathfrak{H} (nach absolutem C.G.S.-Maass) gebracht, und zwar liege sie senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien. Die eine Seite des Metallrechtecks liege parallel zur x -Axe, die zweite parallel zur y -Axe, die magnetischen Kraftlinien parallel zur z -Axe, und zwar möge der positive Sinn dieser Axenrichtungen wie in nebenstehender Figur gewählt werden. In der Figur ist der Rotationsinn der das Magnetfeld ersetzenden Ampère'schen Ströme angegeben.



Wenn ein elektrischer Strom der Stromdichte j^z parallel zur x -Axe in der Metallplatte eingeleitet wird, so müssen zunächst durch das Magnetfeld die nach der positiven x -Axe strömenden positiven Elektronen nach unten, d. h. nach der negativen y -Axe abgelenkt werden. Wir wollen nun aber annehmen, dass von den Querseiten der Metallplatte kein Strom abgenommen werden soll; dann können auch die positiven

1) P. Drude, Ann. d. Phys. 1. p. 566. 1900.

2) Es sollen alle elektrischen Grössen nach absolutem elektrostatischem Maass gemessen werden.

Elektronen nicht dauernd nach unten strömen, sondern sie laden nur beim Einleiten des Stromes j den unteren Rand der Platte zu positivem Potential bis zu der Stärke, dass dessen Einfluss die ablenkende Kraft des Magnetfeldes gerade kompensirt, sodass die Elektronen einfach parallel zur x -Axe dauernd strömen. Durch das positive Potential des unteren Plattenrandes entsteht im Innern der Metallplatte eine positive elektrische (Transversal-)Kraft Y , sodass auf ein Elektron der Ladung e_1 die Kraft $e_1 Y$ nach der y -Axe wirkt. Direct durch das Magnetfeld entsteht infolge des Strömens der positiven Elektronen eine nach der negativen y -Axe gerichtete elektrische Kraft, welche auf ein Elektron der Ladung e_1 die Kraft äussert:

$$(1) \quad K' = - \frac{e_1}{c} \S \frac{d\xi_1}{dt}.$$

Hierin bezeichnet $d\xi_1/dt$ die Strömungsgeschwindigkeit der Elektronen der Ladung e_1 , c das Verhältniss des elektrostatischen zum elektromagnetischen Maasssystem.¹⁾

Wenn nun eine Kraft K auf die Elektronen der Gattung 1 wirkt, deren Anzahl im cm^3 mit \mathfrak{N}_1 bezeichnet sei, so strömen in Richtung der Kraft (y -Axe) in der Zeiteinheit durch die Querschnittseinheit die Anzahl

$$(2) \quad \mathfrak{A} = K v_1 \mathfrak{N}_1$$

hindurch (nach I, p. 576). In unserem Falle ist

$$(3) \quad K = e_1 Y + K' = e_1 \left(Y - \frac{\S}{c} \frac{d\xi_1}{dt} \right).$$

Hiermit haben wir aber noch nicht alle Ursachen erschöpft, welche eine Querströmung von Elektronen in der Metallplatte veranlassen würden. Durch das anfängliche Abdrängen der positiven Kerne des Stromes j nach unten wird ein Konzentrationsgefälle der Kerne in der Querrichtung (nach der y -Axe) veranlasst. Daher bildet sich [nach I, p. 579 und 576, Formeln (25) und (14)] ein Diffusionsstrom

$$(4) \quad \mathfrak{A}' = \frac{4}{3} \alpha T v_1 \frac{\partial \mathfrak{N}_1}{\partial y}$$

nach der negativen y -Axe, falls $\partial \mathfrak{N}_1 / \partial y$ positiv ist.

1) Betreffs der ausführlicheren Ableitung des Wertes K' vgl. z. B. mein Buch: Lehrbuch der Optik p. 399. — Riecke (Wied. Ann. 66. p. 560. 1898) führt diesen Wert von K' als Annahme in seine Theorie ein.

Da nun im stationären Zustande keine Querströmung irgend einer Elektronengattung eintreten kann, so muss sein $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}'$, d. h. wir erhalten aus (2), (3) und (4) die Gleichung:

$$(5) \quad e_1 \left(Y - \frac{\Phi}{c} \frac{d\xi_1}{dt} \right) = \frac{1}{3} \alpha T \frac{\partial \log \mathfrak{N}_1}{\partial y}.$$

Nach der x -Axe strömt wegen Vorhandenseins einer elektrischen Kraft X die Kernzahl (pro Zeiteinheit durch ein cm^2):

$$e_1 v_1 \mathfrak{N}_1 X.$$

Wenn nun auch ein Konzentrationsgefälle der Kerne nach der x -Axe besteht, so würde der Diffusionsstrom

$$\frac{1}{3} \alpha T v_1 \frac{\partial \mathfrak{N}_1}{\partial x}$$

nach der negativen x -Axe bestehen. Da nun die Anzahl von Kernen der Gattung 1, welche in der Zeiteinheit durch die Querschnittseinheit fließen, gleich $\mathfrak{N}_1 (d\xi_1/dt)$ zu setzen ist, so folgt

$$\mathfrak{N}_1 \frac{d\xi_1}{dt} = e_1 v_1 \mathfrak{N}_1 X - \frac{1}{3} \alpha T v_1 \frac{\partial \mathfrak{N}_1}{\partial x},$$

oder

$$(6) \quad \frac{d\xi_1}{dt} = v_1 \left(e_1 X - \frac{1}{3} \alpha T \frac{\partial \log \mathfrak{N}_1}{\partial x} \right).$$

Die Kernzahl \mathfrak{N}_1 im Metall ist nun eine Function der Temperatur. Konzentrationsgefälle der Kerne nach irgend einer Richtung bedingt also notwendig ein Temperaturgefälle nach dieser Richtung und umgekehrt. Um dies deutlich zum Ausdruck zu bringen, schreiben wir:

$$(7) \quad \frac{\partial \log \mathfrak{N}_1}{\partial x} = \frac{d \log \mathfrak{N}_1}{dT} \cdot \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial \log \mathfrak{N}_1}{\partial y} = \frac{d \log \mathfrak{N}_1}{dT} \cdot \frac{\partial T}{\partial y};$$

hierin bezeichnet dann $\partial T/\partial x$ bez. $\partial T/\partial y$ das Temperaturgefälle nach der x - bez. y -Axe.

Dieselben Betrachtungen gelten für irgend eine andere Gattung von Elektronen, denn für jede einzelne Gattung von Elektronen kann im stationären Zustande, wenn ein elektrischer Strom oder ein Wärmestrom dauernd nach der x -Richtung fließt, kein Querstrom (nach der y -Richtung) vorhanden sein, wenn der Platte kein Transversalstrom entnommen wird.

Wir gewinnen daher aus (5), (6) und (7) für zwei Gattungen von Elektronen der Ladungen e_1 und e_2 die Ausgangsgleichungen:

$$(8) \quad \frac{4\alpha T}{3} \frac{d \log \mathfrak{N}_1}{dT} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = e_1 \left(Y - \frac{\oint}{c} \frac{d\xi_1}{dt} \right),$$

$$(9) \quad \frac{4\alpha T}{3} \frac{d \log \mathfrak{N}_2}{dT} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = e_2 \left(Y - \frac{\oint}{c} \frac{d\xi_2}{dt} \right),$$

$$(10) \quad \frac{d\xi_1}{dt} = v_1 \left(e_1 X - \frac{4\alpha T}{3} \frac{d \log \mathfrak{N}_1}{dT} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right),$$

$$(11) \quad \frac{d\xi_2}{dt} = v_2 \left(e_2 X - \frac{4\alpha T}{3} \frac{d \log \mathfrak{N}_2}{dT} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right),$$

$$(12) \quad j = e_1 \mathfrak{N}_1 \frac{d\xi_1}{dt} + e_2 \mathfrak{N}_2 \frac{d\xi_2}{dt}.$$

In diesen Gleichungen bezeichnet X die gesamte, im Magnetfeld bestehende elektrische Kraft nach der x -Axe. Sie kann (durch Vorhandensein eines Longitudinaleffectes) verschieden sein von der äusseren elektrischen Kraft, welche zum Einleiten des Stromes j zwischen den beiden Verticalseiten des Metallrechtecks angelegt wurde.

In den Gleichungen sind

$$e_1, e_2, v_1, v_2, \mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \frac{d \log \mathfrak{N}_1}{dT}, \frac{d \log \mathfrak{N}_2}{dT}$$

constante Eigenschaften des Metalles. Aus den Gleichungen können bei gegebenem

$$j \text{ und } \frac{\partial T}{\partial x}$$

die fünf Grössen:

$$\frac{d\xi_1}{dt}, \frac{d\xi_2}{dt}, X, Y, \frac{\partial T}{\partial y}$$

berechnet werden. Auf die beiden letzteren Grössen kommt es besonders an, da sie die Bedeutung *des elektrischen und thermischen Transversaleffectes* haben.

2. Die galvanomagnetischen Transversaleffecte.

Wir specialisiren die Ausgangsgleichungen zunächst für den Fall:

$$j \text{ gegeben, } \frac{\partial T}{\partial x} = 0,$$

d. h. für den Fall eines elektrischen Stromes in der Platte, ohne dass in gleicher Richtung ein Temperaturgefälle besteht.

Experimentell wird dieser Fall nicht genau realisiert sein, falls man lediglich einen Strom durch die Verticalseiten des Rechtecks durchsendet. Denn wenn auch ursprünglich kein Temperaturgefälle $\partial T / \partial x$ besteht, so wird dies doch principiell, wie in § 4 näher besprochen wird, durch die eintretenden Transversaleffekte herbeigeführt. Diesen longitudinalen galvanomagnetischen Temperatureffect hat Nernst¹⁾ in der That an einem Wismutstäbchen constatirt, er war aber, selbst bei grosser Feldstärke, ausserordentlich schwach. Nun ergibt sich auch theoretisch (vgl. § 4), dass alle Longitudinaleffekte proportional dem Quadrate der Feldstärke zunehmen müssen und in schwachen Feldern, bei welchen wohl schon Transversaleffekte bemerkbar sind, verschwinden. Bei anderen Metallen, als allein Wismut, sind überhaupt keine Longitudinaleffekte beobachtet worden. Wir wollen daher an unserer Annahme festhalten, dass $(\partial T / \partial x) = 0$ ist, falls man lediglich einen Strom j durchleitet, eine Annahme, die auch für Wismut als erfüllt anzusehen ist, wenn das Magnetfeld nicht zu stark gewählt wird.

Durch Elimination von $\partial T / \partial y$ gewinnt man aus (8) und (9):

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} Y \left(e_1 \frac{d \log \mathfrak{N}_2}{dT} - e_2 \frac{d \log \mathfrak{N}_1}{dT} \right) &= \frac{\mathfrak{H}}{c} \left(e_1 \frac{d \xi_1}{dt} \frac{d \log \mathfrak{N}_2}{dT} \right. \\ &\quad \left. - e_2 \frac{d \xi_2}{dt} \frac{d \log \mathfrak{N}_1}{dT} \right), \end{aligned} \right.$$

während aus (10) und (11) entsteht für $(\partial T / \partial x) = 0$:

$$(14) \quad \frac{d \xi_1}{dt} = e_1 v_1 X, \quad \frac{d \xi_2}{dt} = e_2 v_2 X.$$

Daher wird (13):

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} Y \left(e_1 \frac{d \log \mathfrak{N}_2}{dT} - e_2 \frac{d \log \mathfrak{N}_1}{dT} \right) &= \frac{\mathfrak{H}}{c} X \left(e_1^2 v_1 \frac{d \log \mathfrak{N}_2}{dT} \right. \\ &\quad \left. - e_2^2 v_2 \frac{d \log \mathfrak{N}_1}{dT} \right). \end{aligned} \right.$$

Nun ist aber nach (12) und (14):

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} j &= (e_1^2 \mathfrak{N}_1 v_1 + e_2^2 \mathfrak{N}_2 v_2) X = \sigma X, \\ \text{wobei} \\ \sigma &= e_1^2 \mathfrak{N}_1 v_1 + e_2^2 \mathfrak{N}_2 v_2 \end{aligned} \right.$$

1) W. Nernst, Wied. Ann. 31. p. 784. 1887.

die (elektrostatisch gemessene) Leitfähigkeit des Metalles bedeutet. Wir wollen nun (vgl. I, p. 577)

$$(17) \quad e_1 = +e, \quad e_2 = -e$$

setzen, und erhalten dann aus (15):

$$(18) \quad Y \cdot \frac{d \log (\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2)}{dT} = \mathfrak{H} \cdot \frac{j}{\sigma} \cdot \frac{e}{c} \left(v_1 \frac{d \log \mathfrak{N}_2}{dT} - v_2 \frac{d \log \mathfrak{N}_1}{dT} \right).$$

Diese Gleichung für den Halleffect Y stimmt mit der experimentell gefundenen Gleichung

$$(18') \quad Y_m = R \cdot j_m \cdot \mathfrak{H}$$

formal überein, die Indices m an Y und j bezeichnen, dass diese Grössen nach absolutem, elektromagnetischem Maass gemessen sind. R bedeutet den sogenannten Rotationscoefficienten des betreffenden Metalles. R wird positiv genannt, wenn die Niveaulinien des Stromes j durch das Magnetfeld im Sinne der das Magnetfeld ersetzenden (Ampère'schen) Ströme gedreht werden (falls man einen Transversalstrom abnimmt), d. h. bei unserer Lage des Coordinatensystems (vgl. p. 369) würde bei positivem R ein Transversalstrom, den man von der Platte durch seitliche Drähte abnehmen würde, vom unteren Rand der Platte durch die Drähte zum oberen Plattenrand fliessen. In der Platte selbst wird also die positive Elektrizität nach unten gedrängt. Wenn man daher keinen Transversalstrom abnimmt, so muss durch die elektrostatische Ladung des unteren Plattenrandes eine positive elektrische Kraft Y in der Platte entstehen. Gleichung (18') ist also auch hinsichtlich des Vorzeichens richtig.

Da

$$j : j_m = c, \quad Y : Y_m = \frac{1}{c}$$

ist, so ergibt der Vergleich von (18') mit (18):

$$(19) \quad R = \frac{ec}{\sigma} \cdot \frac{v_1 \frac{d \log \mathfrak{N}_2}{dT} - v_2 \frac{d \log \mathfrak{N}_1}{dT}}{\frac{d \log (\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2)}{dT}}.$$

Um auch den transversalen Temperatureffect zu berechnen, addiren wir die Gleichungen (8) und (9), woraus entsteht unter Rücksicht auf (17):

$$\frac{4 \alpha T}{3 e} \left(\frac{d \log \mathfrak{R}_1}{dT} + \frac{d \log \mathfrak{R}_2}{dT} \right) \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\mathfrak{H}}{c} \left(\frac{d \xi_2}{dt} - \frac{d \xi_1}{dt} \right),$$

d. h. nach (14):

$$\frac{4 \alpha T}{3 e} \cdot \frac{d \log (\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2)}{dT} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = - \frac{\mathfrak{H}}{c} e X (v_1 + v_2),$$

oder unter Rücksicht auf (16):

$$(20) \quad \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \frac{d \log (\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2)}{dT} = - \frac{3 e}{4 \alpha T} \cdot \mathfrak{H} \cdot \frac{j}{\sigma} \cdot \frac{e}{c} (v_1 + v_2).$$

Da $d \log (\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2) / dT$ eine universelle, positive Temperaturfunction ist (nach I, p. 582), so hat also der *transversale Temperatureffect bei allen Metallen dasselbe Vorzeichen* (während der Halleffect verschiedene Vorzeichen haben kann). Nach (20) muss bei positivem j und \mathfrak{H} der untere Plattenrand wärmer sein, als der obere. Dieses Vorzeichen entspricht der von v. Ettingshausen¹⁾ gefundenen Regel, dass man, falls man *aussen* um die Platte herumgeht²⁾, von der Eintrittsstelle des Stromes j in die Platte zur erwärmten Querseite im Sinne der das Magnetfeld ersetzenden Ampère'schen Ströme gelangt. Diese Regel fand v. Ettingshausen ausser am Wismut auch am Tellur und Antimon, ferner v. Ettingshausen und Nernst³⁾ an Zinn-Wismutlegierungen bestätigt. — Auch die Riecke'sche Theorie⁴⁾ ergibt dasselbe Vorzeichen der galvanomagnetischen Temperaturdifferenz, während allerdings die Bedeutung der in den Riecke'schen Formeln auftretenden Grössen von der hier gegebenen Theorie erheblich abweicht.

3. Die thermomagnetischen Transversaleffecte.

Wenn ein Temperaturgefälle nach der x -Axe künstlich in der Metallplatte aufrecht erhalten wird, ohne dass man einen elektrischen Strom hindurchsendet, so ist zu setzen:

$$j = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} \text{ gegeben.}$$

1) A. v. Ettingshausen, Wied. Ann. **31**. p. 739. 1887.

2) Diesen Zusatz muss man der grösseren Deutlichkeit halber machen. Dass dieses tatsächlich der Sinn der v. Ettingshausen'schen Regel ist, ergibt sich aus seinen ausführlich l. c. angegebenen Beobachtungen.

3) A. v. Ettingshausen u. W. Nernst, Wied. Ann. **33**. p. 481. 1888.

4) E. Riecke, Wied. Ann. **66**. p. 563. 1898.

In diesem Falle gewinnen wir aus (10), (11) und (12):

$$(e_1^2 \mathfrak{N}_1 v_1 + e_2^2 \mathfrak{N}_2 v_2) X = \frac{4 \alpha T}{3} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \left(e_1 v_1 \frac{d \mathfrak{N}_1}{dT} + e_2 v_2 \frac{d \mathfrak{N}_2}{dT} \right),$$

d. h. dieselbe Gleichung, wie sie auch in I, p. 581, Formel (31) für irgend ein Metall aufgestellt ist, in welchem ein Wärmestrom, aber kein elektrischer Strom fließt.

Daher folgt nach (10) und (11):

$$\begin{aligned} \frac{d \xi_1}{dt} &= \frac{4 \alpha T}{3} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot v_1 \cdot e_2 v_2 \mathfrak{N}_2 \frac{e_1 \frac{d \log \mathfrak{N}_2}{dT} - e_2 \frac{d \log \mathfrak{N}_1}{dT}}{e_1^2 \mathfrak{N}_1 v_1 + e_2^2 \mathfrak{N}_2 v_2}, \\ \frac{d \xi_2}{dt} &= \frac{4 \alpha T}{3} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot v_2 \cdot e_1 v_1 \mathfrak{N}_1 \frac{e_2 \frac{d \log \mathfrak{N}_1}{dT} - e_1 \frac{d \log \mathfrak{N}_2}{dT}}{e_1^2 \mathfrak{N}_1 v_1 + e_2^2 \mathfrak{N}_2 v_2}. \end{aligned}$$

Setzt man diese Werte in (13) ein und berücksichtigt (17), so folgt der thermomagnetische transversale elektrische Effect Y aus:

$$(21) \quad Y = - \mathfrak{H} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{4 \alpha T}{3} \cdot \frac{e^2}{c \sigma} v_1 v_2 \left(\mathfrak{N}_1 \frac{d \log \mathfrak{N}_1}{dT} + \mathfrak{N}_2 \frac{d \log \mathfrak{N}_2}{dT} \right).$$

Die thermomagnetische transversale Temperaturdifferenz folgt aus (8) und (9), wenn man diese Gleichungen bez. mit \mathfrak{N}_1 und \mathfrak{N}_2 multiplicirt und addirt, da $j = 0$ ist, zu:

$$\frac{4 \alpha T}{3} \frac{\partial T}{\partial y} \left(\mathfrak{N}_1 \frac{d \log \mathfrak{N}_1}{dT} + \mathfrak{N}_2 \frac{d \log \mathfrak{N}_2}{dT} \right) = e (\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2) Y.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit (21), so folgt:

$$(22) \quad \frac{\partial T}{\partial y} = - \mathfrak{H} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{e^2}{c \sigma} v_1 v_2 (\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2).$$

Nach v. Ettingshausen und Nernst¹⁾ wird der elektrische Effect Y dargestellt durch

$$(21') \quad Y_m = Q \cdot \mathfrak{H} \cdot \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Q ist positiv, wenn man von der Eintrittsstelle des Wärmestromes zur Eintrittsstelle des erzeugten elektrischen Querstromes (wenn man einen solchen durch seitlich angelötete Drähte abnehmen würde) in die Platte durch eine Bewegung²⁾ im Sinne der das Magnetfeld ersetzenden Ampère'schen Ströme

1) A. v. Ettingshausen u. W. Nernst, Wied. Ann. 29. p. 343. 1886; W. Nernst, Wied. Ann. 31. p. 760. 1887.

2) Im Aussenraum der Metallplatte; vgl. Anm. 2 auf p. 375.

gelangt. Bei dem von uns angenommenen positiven Sinne der Coordinatenaxen und des Magnetfeldes müsste nämlich bei positivem Q und positivem $\partial T/\partial x$ und § der Querstrom in den oberen Plattenrand eintreten. Die positive Elektrizität wird also in der Platte nach dem unteren Rand getrieben, und wenn man keinen Querstrom abnimmt, so muss der untere Plattenrand zu positivem Potential geladen werden, d. h. es muss eine positive elektrische Transversalkraft Y entstehen. Dies entspricht dem Vorzeichen in Formel (21'). Da nun $Y:Y_m = 1/c$, so ergibt der Vergleich von (21) und (21'):

$$(23) \quad Q = -\frac{4\alpha T e^2}{3\sigma} v_1 v_2 \left(\mathfrak{N}_1 \frac{d \log \mathfrak{N}_1}{dT} + \mathfrak{N}_2 \frac{d \log \mathfrak{N}_2}{dT} \right).$$

Dieser thermomagnetische elektrische Effect Q kann nach dieser Formel sowohl positiv, wie negativ sein, während er nach der Riecke'schen Theorie¹⁾ nur einerlei Vorzeichen hat. Thatsächlich werden verschiedene Vorzeichen beobachtet.²⁾

4. Die longitudinalen Effecte.

Wie in § 2 abgeleitet wurde, wird bei positivem j und § der untere Plattenrand wärmer, als der obere. Es besteht daher in der Querrichtung (y -Axe) eine Energieströmung, ohne dass eine Elektronenströmung nach dieser Richtung eintritt. Der Vorgang ist so zu denken, dass von dem unteren Rand der Platte nach dem oberen (wegen der stets bestehenden unregelmässigen Bewegung der Elektronen, gerade wie in der kinetischen Gastheorie) gleich viel Elektronen nach dem oberen Rand der Platte strömen, wie umgekehrt, dass aber die nach oben strömenden Elektronen wegen der höheren Temperatur der unteren Seite der Platte im Durchschnitt grössere Geschwindigkeiten haben, als die von oben nach unten strömenden Elektronen. Erstere Elektronen werden nun, wenn sie positiv geladen sind, durch das Magnetfeld nach rechts abgedrängt, dagegen die von oben nach unten fliegenden posi-

1) E. Riecke, Wied. Ann. 66. p. 565. 1898.

2) Vgl. hierüber auch E. v. Everdingen, Communic. from the Phys. Lab. of Leiden Nr. 42. p. 16. 1898.

tiven Elektronen etwas weniger (wegen ihrer geringeren Geschwindigkeit) nach links, sodass in Summe eine Anhäufung von positiven Elektronen nach der rechten Seite der Platte zu entstehen wird, und zwar muss dieser Effect proportional zu \mathfrak{S}^2 sein, weil die transversale Temperaturdifferenz proportional zu \mathfrak{S} ist. Die Anhäufung von positiven Elektronen auf der rechten Seite der Platte (und die gleichzeitig eintretende Anhäufung von negativen Elektronen auf der linken Seite der Platte) muss aber eine dem Strom j entgegenwirkende elektromotorische Kraft erzeugen, was auch als scheinbare Widerstandsvermehrung des Metalles gedeutet werden kann, welche proportional zu \mathfrak{S}^2 sein muss. Hand in Hand mit diesem elektrischen Longitudinaleffect muss ein thermischer Longitudinaleffect stehen (vgl. § 2), da durch Concentrationsänderungen der Elektronen stets ein Temperaturgefälle erzeugt wird. In den Formeln (8) bis (12) würden diese Longitudinaleffekte dadurch berücksichtigt werden, dass man, wenn j gegeben ist, nicht, wie wir es oben § 2 gethan haben, $\partial T / \partial x = 0$ setzt. Man müsste also, um die Longitudinaleffekte zu berücksichtigen, nach dieser Vorstellung aus gegebenem j , das $\partial T / \partial x$ berechnen. Dagegen ist der elektrische Longitudinaleffect in den Schlussformeln, welche die Transversaleffekte als Function von j enthalten, eliminirt, da X , welches die Summe der äusseren, den Strom j zunächst einleitenden elektrischen Kraft und der inneren durch das Magnetfeld und j entstehenden elektrischen Kraft ist, eliminirt ist.

Jedenfalls ergibt sich, dass die Longitudinaleffekte mit \mathfrak{S}^2 proportional sind, mit dem Vorzeichen der Feldstärke \mathfrak{S} sich nicht umkehren, und bei genügend schwachen Feldern ignorirt werden können, obwohl die Transversaleffekte beobachtbar sein können.

5. Numerische Verwertung der Beobachtungen.

Bei den besprochenen Erscheinungen treten sechs unbekannte, für das Metall charakteristische Temperaturfunctionen auf, nämlich

$$\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, v_1, v_2, \frac{d \mathfrak{N}_1}{d T}, \frac{d \mathfrak{N}_2}{d T}.$$

Wir wollen diese sechs Unbekannten durch andere Bezeichnungen ersetzen, nämlich durch:

$$(24) \quad \begin{cases} \frac{d \log \mathfrak{N}_1}{dT} = x_1, & \frac{d \log \mathfrak{N}_2}{dT} = x_2, & e v_1 = y_1, & e v_2 = y_2, \\ e^2 \mathfrak{N}_1 v_1 = \sigma_1, & e^2 \mathfrak{N}_2 v_2 = \sigma_2. \end{cases}$$

σ_1 und σ_2 bedeuten die elektrischen Leitfähigkeiten der positiven und negativen Elektronen nach elektrostatischem Maasse [vgl. I, p. 582, Formel (37)]. Ferner sei zur Abkürzung gesetzt:

$$(25) \quad \frac{4}{3} \left(\frac{\alpha}{e} \right) T = p.$$

Man kann den Wert der universellen Constanten α/e in folgender Weise nach einem Verfahren von Reinganum¹⁾ bestimmen, welches besser ist, als das früher von mir eingeschlagene (I, p. 577). Nach I, p. 572 ist

$$(26) \quad \alpha T = \frac{1}{2} m u^2,$$

wobei m scheinbare Masse eines Elektrones, u seine mittlere Translationsgeschwindigkeit bedeutet. Es kann aber, nach der Voraussetzung meiner Theorie, m und u sich auch auf ein Gasmolekül beziehen. Bei 18°C. , d. h. $T = 291$, ist nun für Wasserstoff nach der kinetischen Gastheorie

$$u^2 = 3,605 \cdot 10^{10},$$

ferner ergibt sich aus der Elektrolyse für ein zweiatomiges Wasserstoffmolekül:

$$\frac{2e}{m} = 2,896 \cdot 10^{14};$$

setzt man diese Werte in (26) ein, so folgt:

$$(27) \quad \frac{\alpha T}{e} = 1,242 \cdot 10^{-4}, \quad \frac{\alpha}{e} = 4,27 \cdot 10^{-7}$$

(anstatt $\alpha/e = 4,42 \cdot 10^{-7}$, welches ich in I, p. 577 berechnet habe).

Daher ist bei 18°C. :

$$(28) \quad p = 1,656 \cdot 10^{-4}.$$

1) M. Reinganum, Ann. d. Phys. 2. p. 398. 1900.

Unter Benutzung der Bezeichnungen (24) und (25) wird nun nach (19) der Rotationscoefficient R des Halleffectes:

$$(29) \quad R = \frac{e}{\sigma} \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_1 + x_2},$$

ferner der thermomagnetische Coefficient Q nach (23):

$$(30) \quad Q = -\frac{p}{\sigma} (\sigma_1 x_1 y_2 + \sigma_2 x_2 y_1).$$

Führt man ferner für den galvanomagnetischen Temperatureffect einen Coefficienten P ein nach der Gleichung:

$$(31) \quad \frac{\partial T}{\partial y} = -\mathfrak{H} \cdot j_m \cdot P,$$

so ergibt der Vergleich mit Formel (20):

$$(32) \quad P = \frac{1}{p \sigma} \cdot \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}.$$

Führt man schliesslich für den thermomagnetischen Temperatureffect einen Coefficienten S ein nach der Gleichung:

$$(33) \quad \frac{\partial T}{\partial y} = + \mathfrak{H} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot S,$$

so ergibt der Vergleich mit (22):

$$(34) \quad S = \frac{1}{e \sigma} (\sigma_2 y_1 - \sigma_1 y_2).$$

Ferner besteht noch die Relation:

$$(35) \quad \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma.$$

Zur Berechnung der sechs Unbekannten aus Beobachtungen wären nun aber erst fünf Gleichungen aufgestellt, nämlich (29), (30), (32), (34) und (35). Als sechste Gleichung kann man zweckmässig die Abweichung des Metalles vom Wiedemann-Franz'schen Gesetz heranziehen. Nach I, p. 582, Formel (38) ist das Verhältniss der Wärmeleitfähigkeit k zur elektrischen Leitfähigkeit σ :

$$(36) \quad \frac{k}{\sigma} = \frac{4}{3} \left(\frac{\alpha}{e} \right)^2 T \left\{ 1 + 2 T \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma^2} (x_1 + x_2) \right\}.$$

Setzen wir:

$$(37) \quad W = 2 T \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma^2} \cdot (x_1 + x_2),$$

so giebt diese Grösse W die Abweichung des Metalles vom Wiedemann-Franz'schen Gesetz an, und nach (36) und (37)

kann sie in folgender Weise berechnet werden, wenn $k:\sigma$ beobachtet wird. Es ist:

$$(38) \quad 1 + W = \frac{k/\sigma}{0,71} 10^{10},$$

falls k/σ auf 18°C. bezogen wird.

Aus (32) und (37) folgt durch Elimination von $x_1 + x_2$:

$$(39) \quad y_1 + y_2 = P p \sigma \cdot \frac{W}{2 T} \cdot \frac{\sigma^2}{\sigma_1 \sigma_2},$$

daher gewinnt man aus (34) und (39):

$$(40) \quad \begin{cases} y_1 = S c + P p \sigma \cdot \frac{W}{2 T} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_2}, \\ y_2 = -S c + P p \sigma \cdot \frac{W}{2 T} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_1}. \end{cases}$$

Aus (29) und (37) folgt nun:

$$(41) \quad y_1 x_2 - y_2 x_1 = \frac{R \sigma}{c} \cdot \frac{W}{2 T} \cdot \frac{\sigma^2}{\sigma_1 \sigma_2};$$

combinirt man diese Gleichung mit (30), so folgt:

$$(42) \quad \begin{cases} y_1 x_2 = \frac{R \sigma}{c} \cdot \frac{W}{2 T} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_2} - \frac{Q}{p}, \\ y_2 x_1 = -\frac{R \sigma}{c} \cdot \frac{W}{2 T} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_1} - \frac{Q}{p}. \end{cases}$$

Durch Division dieser Gleichungen durch die Gleichungen (40) folgt:

$$(43) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\frac{R \sigma}{c} \cdot \frac{W}{2 T} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_1} + \frac{Q}{p}}{S c - P p \sigma \cdot \frac{W}{2 T} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_1}}, \\ x_2 = \frac{\frac{R \sigma}{c} \cdot \frac{W}{2 T} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_2} - \frac{Q}{p}}{S c + P p \sigma \cdot \frac{W}{2 T} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_2}}. \end{cases}$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen folgt, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$(44) \quad \frac{R \sigma}{c} \cdot \frac{W}{2 T} = \alpha, \quad \frac{Q}{p} = \beta, \quad P p \sigma \cdot \frac{W}{2 T} = \gamma, \quad S c = \delta,$$

$$(45) \quad x_1 + x_2 = \frac{(\alpha \delta + \beta \gamma) \frac{\sigma^2}{\sigma_1 \sigma_2}}{\delta^2 - \gamma^2 \frac{\sigma^2}{\sigma_1 \sigma_2} + \delta \gamma \left(\frac{\sigma}{\sigma_2} - \frac{\sigma}{\sigma_1} \right)}.$$

Eliminirt man nun durch (37) $x_1 + x_2$, so entsteht:

$$(46) \quad \frac{W}{2T} = \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\delta^2 - \gamma^2 \frac{\sigma^2}{\sigma_1\sigma_2} + \delta\gamma \left(\frac{\sigma}{\sigma_2} - \frac{\sigma}{\sigma_1} \right)}.$$

Setzt man daher schliesslich noch:

$$(47) \quad \frac{W}{2T} \cdot \frac{1}{\alpha\delta + \beta\gamma} = \varepsilon, \quad \frac{\sigma_1}{\sigma} = \eta, \quad \frac{\sigma_2}{\sigma} = 1 - \eta,$$

so folgt für η die quadratische Gleichung:

$$(48) \quad \eta^2(1 - \varepsilon\delta^2) + \eta[\varepsilon\delta(\delta + 2\gamma) - 1] - \varepsilon\gamma(\gamma + \delta) = 0.$$

Hat man diese Gleichung für η aufgelöst, so ergeben sich nach (40) und (43) die charakteristischen Eigenschaften des Metalles durch die Formeln:

$$(49) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\alpha + \beta\eta}{-\gamma + \delta\eta}, & x_2 = \frac{\alpha - \beta(1-\eta)}{\gamma + \delta(1-\eta)}, \\ y_1 = \delta + \frac{\gamma}{1-\eta}, & y_2 = -\delta + \frac{\gamma}{\eta}. \end{cases}$$

Da die Gleichung (48) quadratisch in η ist, so folgen, falls beide Wurzeln η positiv und kleiner als 1 ausfallen, zwei mögliche Lösungssysteme für die sechs Beobachtungen: P, Q, R, S, W, σ . Dies ist nun thatsächlich der Fall. Welche Lösung die richtige ist, kann man mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit aus dem Thomsoneffect des Metalles beurteilen. Nach I, p. 586 ist nämlich die in der Zeiteinheit entwickelte, nach mechanischem Maass gemessene Thomsonwärme q zwischen zwei Querschnitten eines Leiters, deren Temperaturdifferenz dT beträgt, falls ein Strom der Stärke i (elektrostatisch gemessen) im Sinne des Temperaturgefälles fliesst:

$$(50) \quad q = p \cdot i dT \left\{ \frac{\sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2}{\sigma} + \frac{3}{4T} \frac{d}{dT} \left[\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma} T \right] \right\}.$$

Einen genaueren Aufschluss über diese Thomsonwärme auf Grund der berechneten Werte $x_1, x_2, \sigma_1, \sigma_2$ könnte man nun allerdings nur geben, wenn man auch den Temperaturcoefficienten

$$\frac{d}{dT} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma} \right)$$

kennt, d. h. wenn man auch die Temperaturcoefficienten der sechs Grössen P, Q, R, S, W, σ beobachtet. Da indes wahr-

scheinlich bei allen Metallen die Leitfähigkeit der einen Elektronengattung die der anderen sehr übertrifft¹⁾, so ist annähernd

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma} = \pm 1,$$

und man kann durch Vernachlässigung dieses Temperaturcoefficienten annähernd setzen (vgl. I, p. 587):

$$(51) \quad q = p \cdot i d T \left\{ \frac{\sigma_1}{\sigma} x_1 - \frac{\sigma_2}{\sigma} x_2 + \frac{3}{4 T} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma} \right\}.$$

Da nun für die beiden möglichen Lösungen von $x_1, x_2, \sigma_1, \sigma_2$ der Thomsoneffect verschieden ausfällt, bei Wismut z. B. sogar dem Vorzeichen nach, so kann man durch Vergleich mit der Beobachtung über Q die richtige Lösung erkennen.

Um zu zuverlässigen Schlüssen zu gelangen, müssten an demselben Metallstück sämtliche sechs Grössen P, Q, R, S, W, σ und womöglich (zur Prüfung der Theorie) auch der Thomsoneffect q beobachtet werden. Leider liegen derartige Beobachtungen nicht vor, v. Ettingshausen und Nernst²⁾ haben P, Q, R, σ , v. Everdingen³⁾ hat P, Q, R, S, σ an derselben Wismutplatte bestimmt.

Wir wollen zunächst erstere Beobachtungen benutzen, und zwar die für das schwächste Magnetfeld ($\mathfrak{H} = 2800$) erhaltenen Zahlen, um die Störung durch Longitudinaleffekte möglichst zu vermeiden. Da v. Ettingshausen und Nernst bei einem Strom der elektromagnetisch gemessenen Dichte $j_m = 2,72$ und im Magnetfeld $\mathfrak{H} = 2800$ eine Temperaturdifferenz von $0,962^\circ$ an einer 2,2 cm breiten Platte beobachtet haben, so ist

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -0,437$$

und nach (31):

$$P = +0,574 \cdot 10^{-4}.$$

1) Vor allem gilt dies bei denjenigen reinen Metallen, welche das Wiedemann-Franz'sche Gesetz befolgen, für welche also W sehr klein ist.

2) A. v. Ettingshausen u. W. Nernst, Wied. Ann. 33. p. 474. 1888.

3) E. van Everdingen, Communic. from the Physic. Laborat. of Leiden Nr. 42. 1898.

Ferner ergab sich:

$$R^1) = -9,3, \quad Q = -0,216, \quad \sigma_m = 4,8 \cdot 10^{-6},$$

d. h.

$$\sigma = c^2 \cdot \sigma_m = 43,2 \cdot 10^{14}.$$

Den Wert von S entnehme ich einer früheren Beobachtung von v. Ettingshausen²⁾, nach der für $\xi = 9500$ bei einer 2,2 cm breiten Platte eine transversale Temperaturdifferenz von $\frac{1}{8}^\circ$ beobachtet wurde, während die longitudinale Temperaturdifferenz der (wahrscheinlich) 4,8 cm langen Platte etwa 80° betrug. Es ist also bei $\partial T / \partial x = 16,7$ und $\xi = 9500$:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -0,0568. \text{)}$$

Daraus ergibt sich nach (33):

$$S = -3,6 \cdot 10^{-7}.$$

Schliesslich entnehme ich die Grösse W , welche die Abweichung des Wismuts vom Wiedemann-Franz'schen Gesetz ergibt, einer Beobachtung von Jaeger und Diesselhorst⁴⁾, derzufolge bei 18°C. ist $k/\sigma \cdot 10^{10} = 1,068$ (vgl. I, p. 578). Daher folgt aus (38):

$$W = 0,505.$$

Die Benutzung dieses Zahlwertes für W bewirkt eventuell eine erhebliche Unsicherheit in den Resultaten, da bisher nicht bekannt ist, ob in verschiedenen Wismutproben W stark variirt, oder nicht. Ich will hier die Berechnung aber angeben, um die zu erwartenden Grössenordnungen für η , x_1 , x_2 , y_1 , y_2 mitzuteilen, und um zu zeigen, dass man nach der hier dargelegten Theorie zu keinen Unmöglichkeiten, d. h. Widersprüchen kommt.

1) Graphisch interpolirt für $\xi = 2800$.

2) A. v. Ettingshausen, Wied. Ann. **33**, p. 136. 1888. Ich vermute, dass diese Beobachtungen sich auf dieselbe Wismutplatte beziehen, wie die später gemeinsam mit Nernst ausgeführten Beobachtungen, aus denen die Werte P , Q , R entnommen sind.

3) Das Vorzeichen ergibt sich nach der von v. Ettingshausen l. c. p. 136 gegebenen Regel.

4) W. Jaeger u. H. Diesselhorst, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin **38**. 1899.

Die quadratische Gleichung (48) ergibt für η die beiden Wurzeln

$$\eta = 0,0234, \quad \eta = 0,960.$$

Da beide kleiner als 1 sind, und da auch für beide Wurzeln y_1 und y_2 positiv ausfällt, so gibt es also thatsächlich zwei verschiedene Lösungssysteme für die benutzten Werte P, Q, R, S, W . Da aber das der zweiten Wurzel $\eta = 0,960$ entsprechende Lösungssystem eine sehr grosse positive Thomsonwärme nach (51) ergibt, während bei reinem Wismut die Thomsonwärme negativ ist, so ist die Lösung $\eta = 0,0234$ zu benutzen.

Den wesentlichen Anteil an der Leitfähigkeit des Wismuts besitzen also die negativ geladenen Elektronen.

Mit $\eta = 0,0234$ berechnet sich nun nach (49):

$$\begin{aligned} x_1 &= + 3,30 \cdot 10^{-2}, & x_2 &= + 0,521 \cdot 10^{-2}, \\ y_1 &= + 2,54 \cdot 10^4, & y_2 &= + 153 \cdot 10^4. \end{aligned}$$

(Rückwärts berechnet sich mit diesen Constanten

$$\begin{aligned} P &= + 0,571 \cdot 10^{-4}, & Q &= - 0,209, & R &= - 9,15, \\ S &= - 0,367 \cdot 10^{-6}, & W &= + 0,51.) \end{aligned}$$

Nach (51) wird die Thomsonwärme

$$q = - p \cdot i dT \cdot 0,66 \cdot 10^{-2}.$$

Falls die Stromstärke $i_m = 1$ nach elektromagnetischem Maasse fliesst, d. h. falls $i = 3 \cdot 10^{10}$ ist, und $dT = 1$ ist, so wird daher mit Benutzung von (28):

$$q = - 1,66 \cdot 3 \cdot 0,66 \cdot 10^4 = - 3,29 \cdot 10^4 \text{ Erg},$$

oder

$$q = - 7,85 \cdot 10^{-4} \text{ g-Cal.},$$

während beobachtet ist¹⁾

$$q = - 0,1 \cdot 10^{-4} \text{ g-Cal.}$$

Die berechnete Thomsonwärme ist also dem absoluten Werte nach viel zu gross, nämlich im Verhältnis 78,5:1. Es

1) Entnommen E. Riecke, Experimentalphysik 2. p. 325.

ist aber zu berücksichtigen, dass 1. die Formel (51) nicht streng ist (vgl. oben p. 382) und 2. dass durch geringe Verkleinerung des Beobachtungsergebnisses für Q (thermomagnetischer elektrischer Effect) sofort ein viel kleinerer Wert für die Thomsonwärme berechnet wird. Nimmt man z. B. für Q den Wert $Q = -0,132$, wie er bei einer früheren Beobachtung (andere Wismutplatte) von Nernst¹⁾ gefunden wurde, während man an den Werten für P, R, S, W, σ festhält, so würde folgen:

$$\begin{aligned}\eta &= 0,049; \quad x_1 = 3,36 \cdot 10^{-2}, \quad x_2 = -1,55 \cdot 10^{-2}, \\ y_1 &= 2,65 \cdot 10^4, \quad y_2 = 73,6 \cdot 10^4, \\ q (\text{für } i_m = 1) &= +16,7 \cdot 10^{-4} \text{ g-Cal.}\end{aligned}$$

q variirt also sehr stark je nach der Annahme von Q , und für einen zwischen $-0,21$ und $-0,13$ liegenden Wert von Q würde sich die Thomsonwärme berechnen lassen zu einem der Beobachtung entsprechenden negativen Werte. Das starke Schwanken des berechneten Thomseffectes je nach der Annahme über die beobachteten Grössen P, Q, R, S, W, σ erklärt sich dadurch, dass die einzelnen Glieder der Klammer der rechten Seite von (51) verschiedene Vorzeichen haben. Das erste Glied ist für Wismut jedenfalls positiv, das letzte jedenfalls negativ, das mittlere Glied, welches x_2 enthält, fällt aber je nach der Wahl der Beobachtungsergebnisse positiv oder negativ aus und kann dadurch das Vorzeichen von q direct beeinflussen. Die einzelnen Terme der Klammer in (51) sind von der Grössenordnung 10^{-2} , wenn diese eine algebraische Summe der Grösse $0,84 \cdot 10^{-4}$ ergeben sollen, wie es der Beobachtung über q entsprechen würde, so müssen sich also die einzelnen Terme in (51) nahezu aufheben. Hierdurch erklärt es sich vielleicht auch, dass der Thomseffect durch die Reinheit und den Zustand des Metalles ausserordentlich stark beeinflusst zu werden scheint (wie schon das Schwanken der Zahlen verschiedener Beobachter beweist); der Wert von x_1 und x_2 kann nämlich dadurch jedenfalls stark beeinflusst werden, wie schon die Verschiedenheit des Halleffectes in verschiedenen Wismutsorten beweist, und folglich wird auch q stark schwanken, eventuell sogar im Vorzeichen.

1) W. Nernst, Wied. Ann. 31. p. 775. 1887.

Bei den angestellten Berechnungen ist aber auch der Wert von S sehr unsicher. Nimmt man ihn, wie es Everdingen (l. c.) gethan hat¹⁾, zu $S = -0,6 \cdot 10^{-6}$ an, anstatt zu $S = -0,367 \cdot 10^{-6}$ und legt man sonst die v. Ettingshausen-Nernst'schen Zahlen $P = +0,574 \cdot 10^{-4}$, $Q = -0,216$, $R = -9,3$, $\sigma_m = 4,8 \cdot 10^{-6}$, $W = 0,505$ zu Grunde, so ergeben sich folgende beide Lösungssysteme:

I. $\eta = 0,023$,

$$x_1 = +3,29 \cdot 10^{-2}, \quad x_2 = +0,725 \cdot 10^{-2},$$

$$y_1 = +1,83 \cdot 10^4, \quad y_2 = +156 \cdot 10^4,$$

oder II. $\eta = 0,933$,

$$x_1 = +4,50 \cdot 10^{-2}, \quad x_2 = -3,09 \cdot 10^{-2},$$

$$y_1 = +51,2 \cdot 10^4, \quad y_2 = +5,61 \cdot 10^4.$$

Ersteres Lösungssystem ergibt eine negative Thomsonwärme von zu grossem absolutem Werte, nämlich es ist für I:

$$x_1 \frac{\sigma_1}{\sigma} - x_2 \frac{\sigma_2}{\sigma} + \frac{3}{4T} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma} = -0,88 \cdot 10^{-2},$$

während es nach dem auf p. 385 angeführten beobachteten Werte des Thomseffectes sein sollte $-0,84 \cdot 10^{-4}$. Das Lösungssystem II ergibt aber eine viel zu grosse positive Thomsonwärme. Nämlich es ist für II:

$$x_1 \frac{\sigma_1}{\sigma} - x_2 \frac{\sigma_2}{\sigma} + \frac{3}{4T} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma} = +4,63 \cdot 10^{-2}.$$

Das Lösungssystem I ist also das wahrscheinlichere. Es unterscheidet sich nicht wesentlich von dem auf p. 385 gegebenen Lösungssystem.

Wenn $S = 0$ wäre, d. h. wenn keine thermomagnetische Temperaturdifferenz bestände, so würde sich bei Annahme der oben benutzten v. Ettingshausen-Nernst'schen Resultate ergeben:

$$\eta = 0,0243, \quad x_1 = +3,33 \cdot 10^{-2}, \quad x_2 = +0,34 \cdot 10^{-2},$$

$$y_1 = 3,64 \cdot 10^4, \quad y_2 = 149 \cdot 10^4.$$

1) Die Bezeichnung d bei Everdingen deckt sich mit unserer Bezeichnung S .

Schliesslich hat Everdingen (l. c.) folgende Zahlen beobachtet (die Buchstaben A, B, C, D decken sich mit seiner Bezeichnung a, b, c, d):

$$\begin{aligned} A = P \cdot \sigma_m &= +1,05 \cdot 10^{-10}, & B = R \cdot \sigma_m &= -8,83 \cdot 10^{-6}, \\ C = -Q &= 0,00456, & D = S &= -1,63 \cdot 10^{-6}, \end{aligned}$$

woraus folgt: $\sigma_m = 8,6 \cdot 10^{-6}$,

$$P = +1,22 \cdot 10^{-5}, \quad R = -10,3$$

und mit Annahme von $W = 0,5$:

$$\eta = 0,0039.$$

Dabei würde sich ein sehr grosser Wert von $x_1 + x_2$ ergeben, den ich aber für unwahrscheinlich halte aus folgendem Grunde: Wenn meine Theorie richtig ist, so muss $x_1 + x_2$ eine bei allen Metallen gleiche Function der Temperatur sein. Nun ergibt sich nach I, p. 600 aus der Combination des Peltiereffectes, des Thomsoneffectes und des thermoelektrischen Verhaltens:

$$T(x_1 + x_2) = q(T) \approx 1,73,$$

d. h.

$$x_1 + x_2 < 0,6 \cdot 10^{-2}.$$

Ich glaube daher, dass das Magnetfeld bei den Versuchen von Everdingen schon zu stark war (es war $\mathfrak{H} = 6100$), um die Longitudinaleffecte, welche bei Wismut besonders stark auftreten, vernachlässigen zu können.

Nach der Bedeutung von $\sigma_1, \sigma_2, y_1, y_2$ nach (24) würde sein:

$$e \mathfrak{N}_1 = \frac{\sigma_1}{y_1}, \quad e \mathfrak{N}_2 = \frac{\sigma_2}{y_2}.$$

Legt man das auf p. 385 berechnete Wertsystem zu Grunde, nach welchem ist

$$\begin{aligned} y_1 &= 2,54 \cdot 10^4, & y_2 &= 153 \cdot 10^4, \\ \sigma_1 &= \eta \cdot \sigma = 1,05 \cdot 10^{14}, & \sigma_2 &= 42,1 \cdot 10^{14}, \end{aligned}$$

und nimmt man den aus den J. J. Thomson'schen Versuchen¹⁾ folgenden Wert $e = 6 \cdot 10^{-10}$ an, so würden sich die im cm^3 bei 18°C . enthaltenen Elektronenzahlen ergeben zu:

$$\mathfrak{N}_1 = 0,69 \cdot 10^{19}, \quad \mathfrak{N}_2 = 0,46 \cdot 10^{19},$$

d. h. von derselben Grössenordnung, wie die im cm^3 Gas bei 1 Atm. Druck enthaltenen Molecülzahlen.

1) J. J. Thomson, Phil. Mag. (5) 46, p. 528. 1898.

6. Weitere Prüfung der Theorie.

Eine Prüfung der Theorie ergibt sich namentlich dann, wenn man an verschiedenen Metallen die vier galvano- und thermomagnetischen Transversaleffekte¹⁾, die elektrische und thermische Leitfähigkeit bestimmt. Dann muss sich nämlich nach der Theorie (vgl. Teil I) sofort das gegenseitige elektrische Verhalten der Metalle, d. h. der Peltiereffekt und ihr thermoelektrisches Verhalten, quantitativ ergeben. Die Beobachtung des Thomsoneffectes in den Metallen ist mindestens wegen des Vorzeichens wichtig, wegen der oben p. 386 besprochenen Verhältnisse wird sich aber der Thomsoneffect aus den galvano- und thermomagnetischen Effecten wegen des grossen Einflusses von Beobachtungsfehlern nicht gut quantitativ genau berechnen lassen. Der umgekehrte Weg, aus dem Thomsoneffect, den vier galvano- und thermomagnetischen Effecten und der elektrischen Leitfähigkeit die thermische Leitfähigkeit, d. h. auch die Abweichung vom Wiedemann-Franz'schen Gesetz (die Grösse W) zu bestimmen, würde jedenfalls vorzuziehen sein. Die Lösung dieses Weges ist nach den Gleichungen (37), (43) und (51) sofort ersichtlich, da dies, falls q aus der Beobachtung entnommen wird, vier Gleichungen sind zur Berechnung der Unbekannten W , η , x_1 und x_2 . Dieser Weg wurde aber hier nicht betreten, weil die Thomsonwärme notwendig an demselben Wismutstück beobachtet werden müsste, für welches auch die thermo- und galvanomagnetischen Effecte beobachtet werden. Ausserdem kennt man nicht den Einfluss des in (51) vernachlässigten Temperaturcoefficienten

$$\frac{d}{dT} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma} \right),$$

1) Es ist zu berücksichtigen, dass in der Theorie vorausgesetzt wurde, dass kein Transversalstrom der Platte entnommen wird. Die elektrischen Transversaleffekte müssten also entweder dadurch gemessen werden, dass man durch Gegenschaltung einer elektromotorischen Kraft in dem durch die Hallelektroden gebildeten Drahtkreise den Transversalstrom auf Null bringt, oder man muss mindestens bei der Messung dieses Transversalstromes ein Galvanometer von sehr grossem Widerstand benutzen.

welcher erst durch Beobachtung der Abhängigkeit der vier galvano- bez. thermomagnetischen Transversaleffecte von der Temperatur ermittelt werden kann. Nur das eine möchte ich hier bemerken, dass man schon aus der Grössenordnung des Thomsoneffectes beim Wismut sowie aus W und den beiden thermomagnetischen Effecten Q und S auf den Wert von η annähernd schliessen kann. Es ist nämlich nach (51) und dem beobachteten Werte für den Thomsoneffect q :

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_1}{\sigma} x_1 - \frac{\sigma_2}{\sigma} x_2 + \frac{3}{4T} \cdot \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma} = x_1 - (x_1 + x_2) \frac{\sigma_2}{\sigma} \\ \quad \quad \quad + \frac{3}{4T} \left(2 \frac{\sigma_1}{\sigma} - 1 \right) = 0,84 \cdot 10^{-4}. \end{array} \right.$$

Nun ist nach (49), da η klein ist und α und γ von etwa derselben Grösse, wie β und δ sind, annähernd

$$x_1 = -\frac{\alpha}{\gamma} = +3,24 \cdot 10^{-2},$$

wenn die auf p. 384 angegebenen Beobachtungsergebnisse benutzt werden. Ferner ist

$$\frac{3}{4T} \left(2 \frac{\sigma_1}{\sigma} - 1 \right) = \frac{3}{4T} (2\eta - 1)$$

annähernd (wenn man $\eta = 0$ setzt) gleich $-0,26 \cdot 10^{-2}$. Damit nun in (52) auf der linken Seite der Gleichung überhaupt die Grössenordnung der rechten Seite, nämlich 10^{-4} , erhalten wird, muss annähernd sein:

$$(x_1 + x_2) \frac{\sigma_2}{\sigma} = x_1 - \frac{3}{4T} = +3 \cdot 10^{-2}.$$

Nun ist aber nach (37):

$$(x_1 + x_2) \cdot \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma^2} = \frac{W}{2T} = 0,86 \cdot 10^{-3}.$$

Daher folgt durch Division dieser beiden letzten Gleichungen:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma} = \eta = 2,86 \cdot 10^{-2} = 0,029.$$

Aus der Grössenordnung des Thomsoneffectes folgt also annähernd dasselbe Verhältnis η der Leitfähigkeit der positiven Elektronengattung zur Gesamtleitfähigkeit, wie aus den vier beobachteten thermo- und galvanomagnetischen Transversaleffecten.

Eine Prüfung der Theorie ergibt sich vor allem auch dadurch, dass $x_1 + x_2$ bei allen Metallen derselbe Zahlwert bei derselben Temperatur sein müsste. Aus den hier und im I. Teil (p. 600) gemachten Berechnungen lässt sich hierüber nichts Zuverlässiges weder im bestätigenden noch im widersprechenden Sinne sagen, da die zur Berechnung herangezogenen Beobachtungen sich auf ganz verschiedene Metallproben beziehen, und es ist bekannt, wie sehr der Thomsons effect, der Peltiereffect, das thermoelektrische Verhalten, die galvano- und thermomagnetischen Effecte und die elektrische sowie thermische Leitfähigkeit in Metallen verschiedener Herkunft und Bearbeitung schwanken.

v. Ettingshausen und Nernst¹⁾ haben die Vermutung ausgesprochen, dass der Halleffect mit der thermoelektrischen Stellung des Metalles in einer nahen Beziehung stehen dürfte. In der That ist es auffallend, dass gerade die Metalle (Wismut und Antimon), welche die grössten Differenzen in ihren Hall'schen Rotationscoefficienten R besitzen, auch am stärksten thermoelektrisch gegeneinander wirksam sind.

In der folgenden Tabelle sind die Metalle in der Reihenfolge des Coefficienten R , wie er durch v. Ettingshausen und Nernst gemessen wurde, angeführt, ferner ist R , sowie das Product $\sigma' R$ angegeben, wobei σ' die relative elektrische Leitfähigkeit bei 0° C. in Bezug auf Quecksilber bedeutet (nach den Tabellen von Landolt und Börnstein), sowie schliesslich die thermoelektrische Spannungsreihe nach Matthiesen²⁾ angegeben. Es handelt sich nur um angenäherte Werte von R und σ' . Auch die Stellung der Metalle in der thermoelektrischen Reihe ist keine scharf präcisirte, da sie durch Reinheit und Bearbeitung der Metalle beeinflusst wird, aber angenähert giebt die thermoelektrische Reihe ein richtiges Bild, da die secundären Einflüsse den Ort eines Metalles in der thermoelektrischen Reihe nur innerhalb gewisser Grenzen verändern.

1) A. v. Ettingshausen u. W. Nernst, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 94. p. 560. 1886.

2) Matthiesen, Pogg. Ann. 103. p. 412. 1858.

Metall	Reihe des Halleffectes			Thermoelektrische Reihe
	R	σ'	$R \sigma'$	
Wismut	-9	0,8	-7,2	Wismut
Nickel	-0,024	7,4	-0,18	Kobalt
Natrium	-0,0025	18,3	-0,043	Nickel
Palladium	-0,0012	6,9	-0,008	Palladium
Magnesium	-0,0009	23	-0,021	Natrium
Silber	-0,0008	60	-0,048	Aluminium
Gold	-0,0007	44	-0,031	Magnesium
Kupfer	-0,0005	56	-0,028	Blei
Aluminium	-0,0004	31	-0,012	Zinn
Platin	-0,0002	6,1	-0,0015	Kupfer
Zinn	-0,00004	8,5	-0,0003	Platin
Blei	+0,00009	4,9	+0,0004	Gold
Zink	+0,0004	16,5	+0,007	Silber
Cadmium	+0,0006	14	+0,008	Zink
Kobalt	+0,0046	9,7	+0,045	Cadmium
Eisen	+0,0113	8	+0,09	Eisen
Antimon	+0,192	2,0	+0,38	Antimon
Tellur	+530	0,00044	+0,23	Tellur

Die Endglieder der thermoelektrischen Reihe und der Reihe des Halleffectes, wie Wismut, Nickel, Natrium, Palladium, Magnesium, Zink, Cadmium, Eisen, Antimon, Tellur stimmen überein, eine eclatante Ausnahme dagegen bildet Kobalt, und ebenfalls ist bei den Mittelgliedern beider Reihen kein paralleler Gang zu constatiren. Auch fand Nernst¹⁾ an Zinn-Wismutlegirungen die thermoelektrische Stellung nicht genau dem Halleffect entsprechend, aber allerdings wiederum angenähert. Aber man kann wohl behaupten, dass, abgesehen vom Kobalt, die Stellung eines Metalles im grossen und ganzen, d. h. ob es am oberen Ende, am unteren Ende, oder in der Mitte steht, für die thermoelektrische Reihe und für die Reihe des Halleffectes dieselbe ist. Auch wenn man die Metalle nach dem Werte von $R \sigma'$ ordnet, so wird, abgesehen vom Palladium, die roh betrachtete Stellung des einen Metalles — ob am Ende oben, unten, oder in der Mitte — nicht geändert.

1) W. Nernst, Wied. Ann. 33. p. 484. 1888.

Wie stellt sich nun die hier gegebene Theorie zu dieser auffallenden Thatsache? Nach I, p. 596, Formel (73) hängt die thermoelektrische Stellung zweier Metalle a und b wesentlich von dem Werte ab:

$$\log \frac{\mathfrak{N}_1^a}{\mathfrak{N}_1^b} = - \log \frac{\mathfrak{N}_2^a}{\mathfrak{N}_2^b},$$

da nach der in I, p. 599 gegebenen Tabelle der zu diesem Logarithmus noch hinzutretende Term φ (a b) wesentlich kleiner ist und das Vorzeichen der thermoelektrischen Kraft nicht beeinflusst.

Nun ist nach (24):

$$\frac{\mathfrak{N}_1^a}{\mathfrak{N}_1^b} = \left(\frac{\sigma_1}{y_1} \right)^a : \left(\frac{\sigma_1}{y_1} \right)^b.$$

Ferner ist nach (24):

$$R \sigma = c \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_1 + x_2}.$$

Nach der Theorie ist nun $x_1 + x_2$ eine universelle Function der Temperatur. Ob nun eine grosse negative Hallconstante, oder ein grosses negatives Product $R \sigma$ durch einen grossen positiven Betrag von

$$y_2 x_1 = e v_2 \frac{d \log \mathfrak{N}_1}{d T}$$

herbeigeführt wird, oder durch einen grossen negativen Betrag von $y_1 x_2$, oder durch beides, lässt sich allgemein vom Standpunkt der Theorie aus nicht beantworten¹⁾ und da ausserdem ein allgemeiner Zusammenhang zwischen σ_1 , σ_2 , x_1 , x_2 theoretisch nicht besteht, so lässt sich also auch nach dieser

1) Der verschiedene Halleffect an verschiedenen Wismutplatten wird vermutlich wesentlich durch Verschiedenheit der Grösse

$$x_1 = \frac{d \log \mathfrak{N}_1}{d T}$$

herbeigeführt. Es beobachtete nämlich v. Ettingshausen (Wied. Ann. 31. p. 744. 1887), dass bei zwei Wismutplatten, in welchen der Halleffect im Verhältnis 1:1,6 stand, die galvanomagnetischen Temperaturdifferenzen (bezogen auf gleiche Stromdichte) nur wenig verschieden waren. Nach Formel (32) ist also zu schliessen, dass $y_1 + y_2$ in beiden Platten nahe denselben Wert hatten.

Theorie ein directer Zusammenhang zwischen der Hallconstante R und der thermoelektrischen Stellung des Metalles nicht voraussagen. Die Prüfung der Theorie kann nur darin gefunden werden, dass man auch beim Antimon z. B. aus den galvano- und thermomagnetischen Effecten die Constanten σ_1 und y_1 berechnet, da sich dann die thermoelektrische Kraft gegen Wismut berechnen lässt.

Noch auf einen anderen merkwürdigen Umstand macht Nernst¹⁾ aufmerksam. Es gehen nämlich die absoluten Werte der Grössen R und Q/K , wo K das auf Grammcalthorien berechnete Wärmeleitungsvermögen ist, einander annähernd parallel und sind von gleicher Grössenordnung, ein Resultat, welches um so auffallender ist, als die Vorzeichen beider Terme regellos gegenseitig wechseln. Beim Anblick der Formeln (29) und (30) der p. 380 liegt es nahe, zu vermuten, dass R und Q nur durch je einen Term des zweigliedrigen Ausdruckes wesentlich beeinflusst werden, d. h. dass von den Producten $y_1 x_2$ und $y_2 x_1$ das eine viel grösser als das andere ist. Ist z. B. $y_1 x_2 > y_2 x_1$, so wird annähernd

$$R = \frac{c}{\sigma} \frac{y_1 x_2}{x_1 + x_2}, \quad Q = -p \frac{\sigma_2}{\sigma} y_1 x_2,$$

und da, falls die Abweichung vom Wiedemann-Franz'schen Gesetz vernachlässigt wird, nach (36) und (25):

$$k = \sigma \cdot \frac{\alpha}{e} p \quad \text{und} \quad K = k : 419 \cdot 10^{-5}$$

ist, so folgt:

$$\frac{Q}{K} = - \frac{419 \cdot 10^5}{\alpha/e} \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma^2} \cdot y_1 x_2,$$

d. h.

$$(I) \quad R : \frac{Q}{K} = - \frac{\alpha}{e} \cdot \frac{c}{(x_1 + x_2) \cdot 419 \cdot 10^5} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_2}.$$

Wenn aber $y_2 x_1 > y_1 x_2$, so folgt:

$$(II) \quad R : \frac{Q}{K} = + \frac{\alpha}{e} \cdot \frac{c}{(x_1 + x_2) \cdot 419 \cdot 10^5} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_1}.$$

Wenn nun im Falle (I) die negative Elektronengattung den wesentlichen Anteil an der elektrischen Leitfähigkeit des

1) W. Nernst, Wied. Ann. 31. p. 775. 1887

Metalles besitzt, sodass $\sigma : \sigma_2$ nahezu gleich 1 ist, im Falle (II) aber die positive Elektronengattung wesentlich zur Leitfähigkeit beiträgt, sodass $\sigma : \sigma_1$ nahe gleich 1, so wäre thatsächlich ein universelles Verhältnis der absoluten Werte von R und $Q : K$ zu erwarten, dessen Vorzeichen aber schwanken könnte.

Nach den berechneten Lösungen der Grössen x_1, x_2, y_1, y_2 bei Wismut tritt nun thatsächlich der Fall (II) ein, d. h. es ist $y_2 x_1$ viel grösser, als $y_1 x_2$. Nämlich nach der auf p. 385 berechneten Lösung ist $y_2 x_1 = 500 \cdot 10^2$, $y_1 x_2 = 1,3 \cdot 10^2$, und thatsächlich tritt auch ein positiver Wert des Verhältnisses $R : Q/K$ ein, aber bei Wismut ist $\sigma : \sigma_1$ nicht annähernd gleich 1, sondern $\sigma : \sigma_1$ ist gleich $1 : 0,0234$. Dadurch wird unser Schluss auf ein von der Theorie vorauszusehendes universelles Verhältnis von $R : Q/K$ hinfällig. — Man könnte ja nun vermuten, dass die oben auf p. 385 berechnete zweite Lösung $\eta = 0,96$, die wir wegen des damit erhaltenen positiven Thomsons effectes ausgeschlossen haben, trotzdem die richtige Lösung wäre; denn dann wäre $\sigma : \sigma_1$ nahezu gleich 1. Dem widerspricht aber, dass dann nach (II) der Zahlenwert der universellen Function $x_1 + x_2$ viel zu klein ausfallen würde. Setzt man nämlich die linke Seite der Gleichung (II) gleich 1, was annähernd der Fall ist, und setzt man für α/e den Wert $4,27 \cdot 10^{-7}$ nach (27), so würde aus (II) folgen

$$x_1 + x_2 = 3 \cdot 10^{-4},$$

was sicherlich zu klein ist. Denn nach (37) könnte dann die Abweichung W vom Wiedemann-Franz'schen Gesetz, welche ein Maximum ist, falls $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{1}{2} \sigma$ ist, höchstens den Wert haben:

$$W = \frac{T}{2} (x_1 + x_2) = 0,044,$$

während es viel Metalle giebt, für welche W grösser ist, z. B. bei Wismut ist $W = 0,5$.

Die von Nernst gefundene Regel über den parallelen Gang von R und $Q : K$ lässt sich also von der Theorie nicht voraussagen, man könnte nur umgekehrt daraus gewisse Schlüsse auf ein universelles Verhältnis von $\sigma : \sigma_2$, bez. $\sigma : \sigma_1$ ziehen, die aber zunächst sehr zweifelhaft sind, solange man nicht auch bei anderen Metallen als Wismut gefunden hat, dass von

den beiden Termen $y_2 x_1$ und $y_1 x_2$ der eine viel grösser ist, als der andere.

7. Die Theorie von Moreau.

Nach der Theorie von Moreau¹⁾ hängt der Hall'sche Rotationscoefficient R mit dem Ettingshausen-Nernst'schen thermomagnetischen elektrischen Coefficienten Q durch die Gleichung zusammen:

$$(53) \quad Q = - R \varrho' \sigma_m,$$

wobei ϱ' zu der spezifischen Wärme der Elektrizität in dem betreffenden Metall proportional ist²⁾ und σ_m seine elektrische Leitfähigkeit bedeutet³⁾ (nach elektromagnetischem Maass).

Der Grundgedanke zur Ableitung der Relation (53) ist bei Moreau folgender: Durch ein Temperaturgefälle nach der x -Axe, welches beim thermomagnetischen Phänomen aufrecht erhalten wird, entsteht eine bestimmte elektrische Kraft X_m in der Metallplatte nach der Gleichung:

$$(54) \quad X_m = - \varrho' \frac{\partial T}{\partial x}.$$

(Der Index m deutet immer das elektromagnetische Maasssystem an.) Das negative Vorzeichen muss in (54) eingeführt werden, weil die Thomsonwärme positiv gerechnet wird, wenn durch einen Strom im Sinne des Temperaturgefälles Wärmeentwicklung eintritt. Bei positivem ϱ' und negativem $\partial T / \partial x$ (Temperaturgefälle nach der x -Axe) muss also X_m positiv sein. Andererseits treibt beim galvanomagnetischen Phänomen den Strom der Dichte j_m eine gewisse elektrische Kraft X_m nach der Gleichung:

$$(55) \quad j_m = \sigma_m X_m'.$$

1) G. Moreau, Compt. rend. 103. p. 122. 1900.

2) Genauer definiert ist ϱ' aus Gleichung (54).

3) Q ist identisch mit der Moreau'schen Bezeichnung $-K$, R mit dem Moreau'schen e , unser ϱ' mit dem Moreau'schen σ , unser σ_m mit dem Moreau'schen $1/\varrho$.

Wenn nun angenommen wird, dass der elektrische Transversaleffect beim thermo- und galvanomagnetischen Phänomen der gleiche ist, wenn dieselbe elektrische Kraft besteht, d. h. falls $X_m = X'_m$ ist, so folgt die Moreau'sche Relation (53). Dann aus (21') und (54) folgt beim thermomagnetischen Effect:

$$Y_m = -Q \cdot \mathfrak{H} \cdot \frac{X_m}{\varrho'},$$

aus (18') und (55) folgt beim galvanomagnetischen Effect:

$$Y'_m = R \cdot \sigma_m \cdot X'_m \mathfrak{H}.$$

Wenn also $Y_m = Y'_m$, falls $X_m = X'_m$ ist, so folgt die Moreau'sche Relation (53).

Es ist nun aber durchaus nicht selbstverständlich, dass im galvano- und thermomagnetischen Phänomen dieselbe elektrische Transversalkraft besteht, falls dieselbe elektrische Longitudinalkraft X herrscht. Denn die Bewegung der Elektronen ist in beiden Fällen, wo einerseits ein elektrischer Strom ohne Wärmestrom und andererseits ein Wärmestrom ohne elektrischen Strom besteht, durchaus verschieden. Nach der hier dargelegten Theorie trifft nun auch in der That die theoretische Voraussetzung von Moreau nicht zu. Man erkennt das am einfachsten, wenn man im galvano- und thermomagnetischen Phänomen Y als Function der elektrischen Kraft X ausdrückt.

Für das galvanomagnetische Phänomen liefert Gleichung (18):

$$(56) \quad Y = \mathfrak{H} \cdot X \cdot \frac{e}{c} \frac{r_1 \frac{d \log \mathfrak{H}_2}{dT} - r_2 \frac{d \log \mathfrak{H}_1}{dT}}{\frac{d \log (\mathfrak{H}_1 \mathfrak{H}_2)}{dT}},$$

während für das thermomagnetische Phänomen die Gleichung (21) liefert, wenn man die im Eingang des § 3 abgeleitete Gleichung benutzt:

$$(57) \quad \frac{4 \alpha T}{3} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = X \frac{\sigma}{e \left(r_1 \frac{d \mathfrak{H}_1}{dT} - r_2 \frac{d \mathfrak{H}_2}{dT} \right)};$$

$$Y = -\mathfrak{H} \cdot X \cdot \frac{e}{c} v_1 v_2 \frac{\frac{d \mathfrak{H}_1}{dT} + \frac{d \mathfrak{H}_2}{dT}}{\frac{d \mathfrak{H}_1}{dT} - \frac{d \mathfrak{H}_2}{dT}}.$$

Die Moreau'sche Voraussetzung würde durch die hier gegebene Theorie bestätigt werden, falls die Factoren von X in beiden Gleichungen (56) und (57) dieselben wären. Das sind sie nun aber durchaus nicht.

Nun tritt allerdings für die Moreau'sche Theorie noch eine Complication hinzu. Moreau nimmt an, dass die Thomsonwärme lediglich infolge der durch das Temperaturgefälle bewirkten Potentialdifferenz entsteht, während nach meiner Theorie (I, p. 585) bei der Thomsonwärme noch ein Anteil hinzutritt, weil in das Volumenelement Elektronen von höherer Temperatur durch den elektrischen Strom hineintransportirt werden, während Elektronen von kälter Temperatur fortgeführt werden. Das Verhältniss beider Anteile der Thomsonwärme ist [nach I, p. 586, Formel (44)]:

$$\frac{1}{3} T \left(\frac{\sigma_1}{\sigma} \frac{d \log \mathfrak{N}_1}{dT} - \frac{\sigma_2}{\sigma} \frac{d \log \mathfrak{N}_2}{dT} \right) : \frac{d}{dT} \left[\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma} T \right],$$

oder näherungsweise (vgl. oben p. 383):

$$\frac{\sigma_1}{\sigma} x_1 - \frac{\sigma_2}{\sigma} x_2 : \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma}.$$

Für Wismut ist nun aber durchaus nicht dieses Verhältniss gross gegen 1, — im Gegenteil müssen aus dem oben p. 386 angeführten Grunde nach dieser Theorie beide Anteile der Thomsonwärme von nahe derselben Grösse sein, sodass man nicht den einen Anteil gegen den anderen vernachlässigen kann.

Die numerischen Bestätigungen, welche Moreau für sein Gesetz gegeben hat, sind ja zwar zunächst überraschend. Da aber Moreau die Zahlen aus Beobachtungen entnommen hat, welche sich auf ganz verschiedene Metallproben beziehen, so ist nach meiner Meinung auf die von Moreau angegebene numerische Bestätigung seines Gesetzes vorläufig nicht sehr viel Gewicht zu legen. Denn schon allein die Thomsonwärme wird von den verschiedenen Beobachtern ganz verschieden angegeben, Moreau benutzt z. B. für Wismut eine Zahl der Thomsonwärme, welche $4\frac{1}{2}$ mal so gross ist, als die hier von

mir benutzte Zahl, welche ich dem Riecke'schen Lehrbuch entnommen habe.¹⁾

Ausserdem hat Moreau selbst eine Ausnahme von seinem Gesetz bei Nickel constatirt.

8. Schlussbemerkungen.

Zum Schluss möchte ich hier noch einmal hervorheben, dass es sehr wünschenswert ist, für verschiedene Metalle sowohl die vier transversalen galvano- und thermomagnetischen Effecte²⁾, sowie die thermische und elektrische Leitfähigkeit und die Thomsonwärme an denselben Materialstücken zu beobachten. Man könnte dann das gegenseitige elektrische Verhalten der Metalle (Thermoelektricität, Peltiereffect, Contactpotentialdifferenz) nach den gegebenen Formeln voraussagen, und so die Theorie prüfen. Sie ist, abgesehen hinsichtlich der Longitudinaleffecte, auch hinsichtlich vieler anderen Details der Beobachtungen sicherlich erweiterungsbedürftig, vor allem wenn es sich um die exacte Abhängigkeit der Erscheinungen von der Feldstärke handelt. Wie nämlich v. Ettingshausen und Nernst³⁾ gefunden haben, wechselt das Vorzeichen vom Halleffect bei Zinn-Wismutlegirungen, indem es in schwachen Magnetfeldern negativ, in starken positiv ist. Auch beim reinen Wismut nähert sich der negative Wert von R bei wachsender Feldstärke der Null. Mir scheint zur Erklärung dieser Erscheinungen berücksichtigt werden zu müssen, dass Wismut merklich stark diamagnetisch ist, und dass daher die Elektronen, anstatt in gerader Bahn nach der kinetischen Vorstellung hin und her zu fliegen, in gekrümmten Bahnen hin und her fliegen, deren Krümmung um so stärker ist, je kräftiger das Magnetfeld ist. Daher werden die Beweglichkeiten v_1 und v_2 Functionen des Magnetfeldes \mathfrak{H} sein, und dass dann eventuell

1) Riecke benutzt relative Messungen und die absolute von Le Roux (Ann. de chim. et de phys. (4) 10. p. 201. 1867) und H. Haga (Wied. Ann. 28. p. 179. 1886).

2) Wobei möglichst wenig Transversalstrom der Platte zu entnehmen ist (vgl. oben p. 389).

3) A. v. Ettingshausen u. W. Nernst, Wied. Ann. 33. p. 478 1888.

sogar ein Vorzeichenwechsel der Hallconstante R bei wachsendem ξ eintreten kann, ist nach den gegebenen Formeln verständlich.¹⁾ — Ausserdem ist zu berücksichtigen, dass Wismut merklich krystallinisch ist, aber von dieser Complication kann man wohl bei gegossenen oder elektrolytisch hergestellten Platten am ehesten noch absehen.

Mir liegt aber zunächst daran, die Theorie mit den einfachsten Annahmen soweit zu führen, dass das Experiment mit Prüfungen einsetzen kann und andererseits gewisse Anregungen zum Experimentiren zu geben. So würde es z. B. nach der hier gegebenen Theorie interessant sein, schon allein die galvanomagnetischen Temperaturdifferenzen in verschiedenen Metallen miteinander zu vergleichen, da nach Formel (20) auf p. 375 diese sich wie die Summe der Beweglichkeiten beider Elektronengattungen verhalten müssen. — Ob es nötig sein wird, mehr als zwei Gattungen leitender Elektronen, z. B. in nicht reinen Metallen, anzunehmen, kann auch nur das Experiment entscheiden; jedenfalls meine ich, dass man zunächst es versuchen muss, mit Annahme nur zweier Gattungen die That-sachen darzustellen.

Vor allem interessirt nun auch die Anwendung der Elektronentheorie auf die optischen Eigenschaften der Metalle.²⁾ Wie ich schon l. c. erwähnte, kommt man nicht zur Darstellung der optischen Eigenschaften von Gold und Kupfer mit der Annahme von leitenden Elektronen allein aus. Mein Standpunkt hat sich gegenüber dem von mir in dem damaligen citirten Aufsatz eingenommen insofern verändert, als ich jetzt meine, dass man im allgemeinen niemals die Annahme von leitenden Elektronen allein machen kann, sondern dass auch stets isolirende Elektronen zu berücksichtigen sind. Denn da nach meiner Theorie $\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2$ eine universelle Function der Temperatur ist, so kann im allgemeinen nicht $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2$ sein. Dann muss es aber isolirende Elektronen geben, da die Summe der elektrischen Ladungen im Volumenelement verschwinden

1) Auch die complicirte Abhängigkeit des thermomagnetischen Effectes Q von der Feldstärke ξ (vgl. A. v. Everdingen, l. c. und E. Yumaguchi, Ann. d. Phys. 1. p. 214. 1900) werden so vielleicht erklärbar.

2) Vgl. P. Drude, Physik. Zeitschr. 1. p. 161. 1900.

muss. Wenn es keine isolirende Elektronen gäbe, d. h. wenn $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2$ wäre, so müsste überdies nach Formel (22) auf p. 376 die thermomagnetische transversale Temperaturdifferenz verschwinden. Da dies im allgemeinen nicht eintritt, so sind also auch aus diesem Grunde isolirende Elektronen zur Erklärung der optischen Eigenschaften der Metalle mit zu berücksichtigen.

Der consequente Weg würde nun sein, dass man aus den elektrischen und thermischen Eigenschaften eines Metalles in und ausserhalb eines Magnetfeldes zunächst die Constanten der Leitungselektronen berechnet, um dann mit ihrer Hülfe aus den optischen Eigenschaften des Metalles die Constanten der isolirenden, d. h. an bestimmte Orte gebundene Elektronen zu berechnen. Es wird aber wegen der Schwierigkeit der Beobachtungen sehr lange dauern, bis dass dieser Weg mit Sicherheit eingeschlagen werden kann.

Gewisse Schlüsse allgemeiner Natur lassen sich aber aus den optischen Eigenschaften der Metalle vom Standpunkt der Elektronentheorie aus ziehen, ohne die Constanten der Leitungselektronen kennen zu müssen. Dies gedenke ich in einem nachfolgenden III. Teil genauer darzulegen.

Nachtrag zu dem I. Teil meiner Elektronentheorie der Metalle.

Einige Fachgenossen haben mich freundlichst darauf aufmerksam gemacht, dass die im § 3 des I. Teiles p. 573 angestellte Berechnung der Wärmeleitfähigkeit des Metalles auf einer Voraussetzung beruhe, welche wahrscheinlich nicht erfüllt ist, nämlich dass die Kernzahl (pro cm^3) von der Temperatur unabhängig sei. Ich möchte jetzt, da ich vermute, dass sich mancher Leser an der Voraussetzung jenes Paragraphen stösst, hervorheben, dass ich diese Voraussetzung selbst später in § 6 fallen lasse und die dort abgeleitete Formel (34) für die Wärmeleitfähigkeit immer anzunehmen ist, da ja nach meiner Theorie $\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2$ eine universelle Temperaturfunction ist, für die jedenfalls $d(\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2)/dT$ von Null verschieden ist. Dass trotzdem bei vielen Metallen das Wiedemann-Franz'sche Gesetz nahezu gilt, was ich als strenggültig nur unter der Voraus-

setzung des § 3 abgeleitet habe, liegt nach der Theorie (vgl. I, p. 583) daran, dass bei den meisten Metallen die eine Elektronengattung einen viel grösseren Anteil an der elektrischen Leitfähigkeit hat, als die andere. — In welcher Weise nun aber \mathfrak{N}_1 oder \mathfrak{N}_2 mit der Temperatur variirt, kann man jedenfalls aus Analogie mit den normalen Gasen nicht berechnen, da diese Analogie hier aufhören wird, indem wir bei den Elektronen der Metalle das Dissociationsgesetz finden (vgl. I, p. 591).

(Eingegangen 9. September 1900.

**2. Ueber die thermische und elektrische Leitfähigkeit von Kupfer-Phosphor und Kupfer-Arsen;
von A. Rietzsch.**

(Auszug aus der Leipziger Dissertation.)

Im Jahre 1860 veröffentlichten Matthiessen und Holzmänn¹⁾ eine Arbeit über die elektrische Leitfähigkeit des reinen Kupfers und deren Verminderung durch Metalloide. Die Verfasser bringen da vor allem das merkwürdige Resultat, dass die elektrische Leitfähigkeit des reinen Kupfers durch geringe Zusätze von Phosphor und Arsen ganz bedeutend herabgemindert wird; sie geben, wenn man die elektrische Leitfähigkeit des Silbers = 100 setzt, die des reinen Kupfers zu 93,08 bei 18,9° an und finden, dass dieselbe durch einen Zusatz von 0,13 Proc. Phosphor bereits auf 67,67 und bei Zusatz von 2,5 Proc. auf 7,24 sinkt. Aehnliche Resultate ergeben sich für Kupfer-Arsen; die elektrische Leitfähigkeit ist hier für Kupfer mit 2,8 Proc. Arsen = 13,14 und bei Zusatz von 5,4 Proc. Arsen = 6,18.

Einige Jahre früher hatten G. Wiedemann und R. Franz²⁾ Untersuchungen über die Leitfähigkeit der Metalle für Electricität und Wärme angestellt und hatten das Gesetz aufgestellt und bestätigt, dass die Leitfähigkeit der Metalle für Wärme proportional ihrer elektrischen Leitfähigkeit sei. In einer späteren Arbeit³⁾ bestätigt G. Wiedemann dieses Gesetz für Legirungen. Neuere Untersuchungen⁴⁾ haben nun allerdings ergeben, dass das Wiedemann-Franz'sche Gesetz

1) A. Matthiessen u. M. Holzmänn, Pogg. Ann. 110. p. 222. 1860.

2) G. Wiedemann u. R. Franz, Pogg. Ann. 89. p. 497. 1853.

3) G. Wiedemann, Pogg. Ann. 108. p. 393. 1859.

4) F. Kohlrausch, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1899. p. 711; W. Jaeger u. H. Diesselhorst, l. c. 1899. p. 719.

nicht streng ist; immerhin ist schon die annähernde Erfüllung auffallend, wenn man bedenkt, innerhalb welch weiter Grenzen die Leitfähigkeiten variiren.

Die vorliegende Arbeit soll nun untersuchen, *ob das Wiedemann-Franz'sche Gesetz annähernd wenigstens richtig bleibt für Verbindungen von Metallen mit Metalloiden, speciell für Kupfer-Phosphor und Kupfer-Arsen.*

Das zu untersuchende Material bestand aus gegossenen Stäben und Platten und war von der Giesserei von Gebrüder Köhler in Altenburg hergestellt worden. Die Stäbe wurden abgefraist und so alle auf den Durchmesser von ca. 5 mm gebracht; etwaige Gussfehler machten sich sofort beim Fraisen durch Zerbrechen des Stabes bemerkbar. Bei der Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit zeigte es sich, dass die Stäbe sonst im allgemeinen gut homogen waren. Die Platten wurden abgehobelt und die homogensten Stücke ausgesägt und zur Messung benutzt. Der Phosphor- resp. Arsen-Gehalt wurde durch das Versuchslaboratorium von Hrn. Dr. Röhrig, sowie zum Teil im ersten chemischen Laboratorium der Universität unter Leitung des Hrn. Hofrat Dr. Guthzeit von den Herren Fritz Müller und Paul Wand bestimmt; ich bin diesen Herren zu grossem Danke verpflichtet. Bei der Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit wurde dafür Sorge getragen, dass die Oberflächen des Kupfers und der Bronzen sämtlich die gleichen waren, was durch einen sehr dünnen, blanken Silberüberzug erreicht wurde; dieser wurde hergestellt durch ein Gemenge von Silbernitrat und weinsaurem Kali; bei der Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit wurde diese Versilberung wieder beseitigt.

Im Folgenden soll zunächst die Bestimmung der thermischen, sodann der elektrischen Leitfähigkeit der Bronzen beschrieben werden.

Wärmeleitfähigkeit.

I. Stabmethode.

Es wird die relative Wärmeleitfähigkeit, d. h. das Verhältnis der inneren zur äusseren Wärmeleitfähigkeit nach Fourier durch die folgenden Betrachtungen abgeleitet:

Ist in einer Metallstange vom Querschnitt $= q$ und vom Umfang $= s$ ein stationäres Temperaturgefälle vorhanden und bestimmt man die Temperaturen t_0 , t_1 und t_2 irgend dreier, in gleichen Abständen $= d$ voneinander entfernter Punkte, so findet zwischen diesen Temperaturen die folgende Relation statt:

$$\frac{t_0 + t_2}{t_1} = e^{d \sqrt{\frac{\alpha \cdot s}{\lambda \cdot q}}} + e^{-d \sqrt{\frac{\alpha \cdot s}{\lambda \cdot q}}},$$

dabei ist λ die innere, α die äussere Leitfähigkeit der Stäbe.

Setzen wir in dieser Formel:

$$e^{d \sqrt{\frac{\alpha \cdot s}{\lambda \cdot q}}} = x \quad \text{und} \quad \frac{t_0 + t_2}{t_1} = c,$$

so ergibt sich:

$$x = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - 1},$$

wobei das obere Zeichen nur Sinn hat, da $x > 1$ sein muss.

Setzen wir nun

$$\sqrt{\frac{\alpha \cdot s}{\lambda \cdot q}} = y,$$

so folgt:

$$d \cdot y = \lg \text{nat } x = 2,3026 \cdot \log x,$$

wobei $\log x$ den Brigg'schen Logarithmus bedeuten soll. Wir erhalten also, wenn wir noch $(y/2,3026) = z$ setzen:

$$z = \frac{\log x}{d} = \frac{1}{2,3026} \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \frac{s}{q}},$$

Es ergibt sich daher:

$$\frac{\lambda}{\alpha} = \frac{q}{s} \cdot \frac{1}{x^2 (2,3026)^2}.$$

Der zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit benutzte Apparat ist derselbe, mit dem bereits Wiedemann und Franz ¹⁾ ihre Messungen ausgeführt haben, und ist in folgender Weise gebaut:

1) G. Wiedemann u. R. Franz, Pogg. Ann. 89. p. 501. 1853.

Eine tubulirte Glasglocke, 50 cm lang, 16 cm im Durchmesser, ist auf einen 16 cm langen Cylinder = k von starkem Kupferblech luftdicht aufgekittet, dieser trägt an seinem der Glasglocke abgekehrten Ende einen 25 mm breiten und 12 mm dicken Ring von Messing, auf welchen eine gleichfalls 12 mm dicke Messingscheibe aufgeschliffen ist und durch mehrere Schrauben = ss luftdicht aufgedrückt wird. Diese Messingscheibe trägt in ihrer Mitte eine Hülse = c von 9 mm Lichtweite, in die der ebenso starke, 45 cm lange Kupferstab = a , welcher an die zu untersuchenden Stäbe angelötet wurde, genau hineinpasst. Um die Stäbe nun auch an dem Tubulus = d

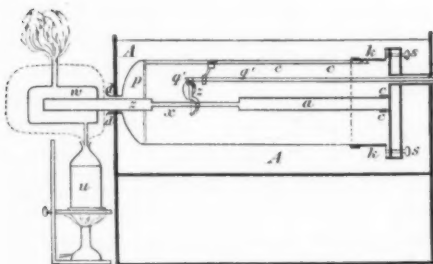


Fig. 1.

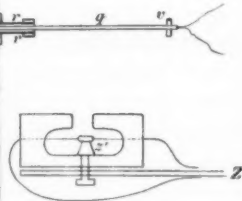


Fig. 2.

des Glaszylinders zu befestigen, wurde, da die zu untersuchenden Stäbe = x nur 13 cm lang waren, ein 9 mm dicker und 35 cm langer, reiner Kupferstab = z an den Bronzestab angelötet und durch einen Kork gehalten.

Um die auf diese Weise in der Axe der Glasglocke aufgespannten Stäbe zu erwärmen, wird auf dem Fortsatze von z ein 50 mm weiter und 8 cm langer Cylinder = w von Messingblech aufgeschoben, durch den beständig Wasserdampf strömt, der im Kolben = u entwickelt wird. Um den Erwärmungsapparat selbst vor Luftströmung zu schützen, ist der ganze Cylinder = w , sowie das Dampfzuleitungsrohr aus dem Kolben mit einer dicken Schicht Watte umwunden (Fig. 1).

Auf diese Weise teilt sich die Wärme des Wasserdampfes dem Kupferstab = z mit und durch diesen auch dem in der Glocke in z und a eingelöteten Bronzestab = x . Um nun die

Temperatur von x an verschiedenen Stellen genau bestimmen zu können, dient die folgende Vorrichtung: Die Messingscheibe ist oberhalb c durchbrochen und trägt dort ein 14 cm langes und 25 mm weites Messingrohr, das bei r in eine Stopfbüchse endigt. In dieser Stopfbüchse ist durch eine hölzerne Handhabe $= v$ ein 90 cm langes, in Centimeter geteiltes Messingrohr $= q q'$ verschiebbar; damit es die richtige Lage bewahre, ist es an seinem im Innern der Glasglocke gelegenen Ende q' mit einem kleinen Ringe versehen, der sich auf der in der Glasglocke befestigten Schiene $= c$ fortschieben lässt; letztere ist zwischen dem in der Glocke festgekitteten Messingreifen $= p$ und dem Kupfercylinder $= k$ ausgespannt. An dem Rohre $= q q'$ ist am Ende $= q'$ eine ziemlich starke Stahlfeder $= Z$ angebracht, die an ihrem unteren Ende das Thermoelement $= T$ trägt. An der Feder $= Z$ ist ein 30 mm langes und 16 mm breites Elfenbeinplättchen festgeschraubt, in das ein 20 mm langer und 10 mm breiter Einschnitt gemacht ist, in welchem das Thermoelement ausgespannt ist; der Einschnitt verjüngt sich an seiner offenen Seite bis zu einer Länge von 6 mm, damit immer dieselbe Stelle des Thermoelementes den Stab berührt. Unter der Lötstelle ist ferner noch der Elfenbeinzapfen $= z'$ angebracht, damit bei dem festen Andrücken des Elementes an den Stab dieses nicht zerreißen kann (Fig. 2). Das Thermoelement selbst besteht aus zwei aneinander gelöteten Eisen- und Neusilberdrähten von nur 0,5 mm Dicke; an den Enden dieser beiden Drähte sind die durch $q q'$ zum Galvanometer führenden Kupferdrähte angelötet. Der ganze bisher beschriebene Apparat liegt in einem grossen Kasten $= A$ von Zinkblech, der mit Wasser von constanter Temperatur (15°C.) gefüllt ist. Aus diesem Kasten $= A$ ragt nur der zur Erwärmung der Stäbe dienende Teil und die Stopfbüchse heraus.

Da man durch diese Methode nur das Verhältnis der äusseren Wärmefähigkeit $= \alpha$ zur inneren $= \lambda$ erhält, so wurde dafür gesorgt, dass erstere bei den Stäben constant blieb, was durch die oben (p. 404) beschriebene Versilberung erreicht wurde.

Nachdem ein Bronzestab auf die oben beschriebene Weise in den Apparat eingeführt und durch zweistündiges Heizen des

Erwärmungsapparates auf constante Temperatur gebracht worden war, wurde durch Umdrehen des Rohres $q q'$ um sich selbst das Thermoelement in Abständen von Centimeter zu Centimeter gegen den Stab gedrückt; nach kaum 6 Secunden hatte das Galvanometer eine constante Ablenkung erhalten. Nach Ablesung des Ausschlages wurde das Element wieder zurückgedreht, sodass der Rücken des Elfenbeinplättchens die Glaswand wieder berührte; durch dieses Verfahren wurde erreicht, dass die zweiten Lötstellen, d. h. die Stellen, an denen das Element an die zum Galvanometer führenden Drähte angelötet ist, eine stets constante Temperatur erhielten. Das Thermoelement wurde stets nur so fest an den Stab gedrückt, dass sich der Ausschlag nicht mehr vergrösserte, wenn es noch fester angedrückt wurde; es wurde also stets das Maximum des Ausschlages abgewartet. Jeder Stab wurde mehrere Male untersucht und aus diesen Untersuchungen das Mittel genommen; ebenso wurde das Thermoelement an jede Stelle 6—10 mal gedrückt und aus den Beobachtungen der Mittelwert genommen. Sämtliche Stäbe wurden vom kalten Ende nach dem heissen zu untersucht.

In den folgenden Tabellen sind die nach der beschriebenen Methode gewonnenen Resultate eingetragen; überall giebt die erste Columnne in Centimetern die Entfernung der Stellen der Stäbe, deren Temperatur beobachtet wurde, vom kalten Ende an gerechnet. In der zweiten Columnne sind die beobachteten Ausschläge, in der dritten sind die Werte für z verzeichnet, mit deren Hülfe man das Verhältnis der inneren zur äusseren Wärmeleitfähigkeit berechnet. Es sollte z constant sein, falls die Wärmeleitfähigkeiten von der Temperatur unabhängig sind.

I. Reines Kupfer (Stab Nr. 0).

Das Kupfer war gezogen und chemisch rein; es wurden zwei Stäbe (Nr. 0 und Nr. 0') untersucht, von denen der erste (Nr. 0) einige Riefen hatte, die beim Ziehen entstanden waren. Er war nur blank polirt, nicht abgefraist und 5,495 mm dick; der zweite (Nr. 0') war abgefraist und hatte eine sehr gute Oberfläche; sein Durchmesser betrug 5,02 mm.

Erster Kupferstab (Nr. 0). Durchmesser = 5,495 mm.

Mittel aus 6 Beobachtungen.			Mittel aus 6 Beobachtungen.		
1.	194,0		1.	206,0	
2.	208,2	z	2.	220,0	z
3.	224,0	$d = 6 \text{ cm } 0,0225$	3.	241,5	$d = 6 \text{ cm } 0,0314$
4.	241,5	$d = 5 \text{ cm } 0,0220$	4.	265,5	$d = 5 \text{ cm } 0,0276$
5.	259,5	0,0208	5.	287,0	0,0289
6.	278,5	0,0212	6.	305,5	0,0346
7.	298,0	$d = 4 \text{ cm } 0,0260$	7.	327,0	$d = 4 \text{ cm } 0,0143$
8.	318,0	0,0217	8.	348,0	0,0206
9.	340,0	0,0188	9.	373,0	0,0290
10.	360,0	0,0197	10.	402,0	0,0366
11.	381,0	0,0190	11.	436,0	0,0401
12.	405,0	Mittel: 0,0213	12.	470,5	Mittel: 0,0292
13.	431,0		13.	510,5	

Zweiter Kupferstab (Nr. 0'). Durchmesser = 5,02 mm.

Mittel aus 6 Beobachtungen		Mittel aus 6 Beobachtungen		Mittel aus 6 Beobachtungen	
1.	188,4 z	205,0 z	206,0 z		
2.	204,0 $d = 5 \text{ cm } 0,0244$	225,0 $d = 5 \text{ cm } 0,0217$	229,5 $d = 5 \text{ cm } 0,0145$		
3.	220,6 0,0186	250,0 0,0148	253,0 0,0207		
4.	243,3 $d = 4 \text{ cm } 0,0218$	269,5 $d = 4 \text{ cm } 0,0237$	276,0 $d = 4 \text{ cm } 0,0153$		
5.	264,6 0,0232	294,0 0,0219	301,0 0,0141		
6.	282,5 0,0202	318,0 0,0227	324,5 0,0174		
7.	304,5 0,0150	343,0 (0,0120)	348,0 0,0202		
8.	328,0 Mittel: 0,0205	368,0 Mittel: 0,0210	375,0 Mittel: 0,0170		
9.	351,5	397,0	402,0		
10.	374,0	424,0	425,0		
11.	399,0	451,0	452,0		
12.	419,0	471,0	487,0		

Wir erhalten hier für z zwei Werte, je nachdem wir den Mittelwert aus allen 5 Beobachtungsreihen oder nur aus den drei übereinstimmendsten nehmen und zwar wird $z = 0,0218$ oder $z = 0,0209$. Ich habe den ersten Wert der Berechnung zu Grunde gelegt, obwohl er der Mittelwert von fünf schlecht übereinstimmenden Beobachtungsreihen ist; wie sich später zeigen wird, ist der Einfluss nicht so bedeutend, ob man den

ersten oder zweiten Wert von z nimmt, als es für den ersten Anblick zu sein scheint. Die Beobachtungsreihen selbst sind an verschiedenen Tagen gemacht worden und es mag die Verschiedenheit der Reihen ihren Grund darin haben, dass der Stab nicht absolut genau in der Axe der Glasglocke war und sich beim Andrücken des Thermoelementes etwas durchbog, sodass er nicht immer von derselben Stelle des Thermoelementes berührt wurde.

II. Kupfer mit 0,34 Proc. Phosphor (Stab Nr. 1).

Durchmesser = 5,13 mm.

Mittel aus 6 Beobachtungen.			Mittel aus 4 Beobachtungen.		
1.	98,0	z	1.	97,9	z
2.	122,0	$d = 5 \text{ cm}$ 0,0458	2.	120,0	$d = 5 \text{ cm}$ 0,0429
3.	145,9	0,0459	3.	135,6	0,0446
4.	173,4	$d = 4 \text{ cm}$ 0,0382	4.	160,7	$d = 4 \text{ cm}$ 0,0393
5.	201,5	0,0435	5.	189,6	0,0418
6.	230,5	0,0498	6.	217,4	0,0427
7.	259,5	0,0476	7.	244,1	0,0456
8.	296,6	Mittel: 0,0451	8.	273,0	Mittel: 0,0428
9.	330,1		9.	306,4	
10.	376,4		10.	347,4	
11.	428,6		11.	390,9	
12.	477,8		11.	434,1	

Mittel aus beiden Beobachtungsreihen: $z = 0,0440$.

III. Kupfer mit 0,87 Proc. Phosphor (Stab Nr. 2).

Durchmesser = 5,03 mm.

Mittel aus 12 Beobachtungen.

1.	60,0	z
2.	87,1	$d = 5 \text{ cm}$ 0,0555
3.	114,6	$d = 4 \text{ cm}$ 0,0495
4.	141,7	0,0556
5.	170,7	0,0622
6.	201,4	Mittel: 0,0557
7.	232,0	
8.	271,0	
9.	317,5	
10.	369,1	
11.	427,7	

IV. Kupfer mit 1,79 Proc. Phosphor (Stab Nr. 3).

Durchmesser = 5,34 mm.

Mittel aus 6 Beobachtungen.

1.	54,5	α
2.	89,0	$d = 4 \text{ cm}$ 0,0595
3.	121,5	0,0615
4.	156,0	$d = 3 \text{ cm}$ 0,0570
5.	193,5	0,0607
6.	238,0	0,0571
7.	282,0	0,0648
8.	332,5	Mittel: 0,0601
9.	392,0	
10.	465,5	

V. Kupfer mit 2,08 Proc. Phosphor (Stab Nr. 4).

Durchmesser = 5,37 mm.

Mittel aus 8 Beobachtungen.

Mittel aus 8 Beobachtungen.

1.	24,3	α	1.	24,7	α
2.	42,9	$d = 5 \text{ cm}$ 0,0730	2.	44,4	$d = 4 \text{ cm}$ 0,0723
3.	63,8	0,0731	3.	65,3	0,0736
4.	84,8	$d = 4 \text{ cm}$ 0,0627	4.	87,5	$d = 3 \text{ cm}$ 0,0727
5.	109,5	0,0714	5.	112,8	0,0696
6.	133,7	0,0742	6.	140,1	0,0745
7.	163,7	0,0770	7.	172,8	0,0764
8.	195,0	Mittel: 0,0719	8.	207,8	Mittel: 0,0732
9.	232,2		9.	252,8	
10.	284,5		10.	307,9	
11.	343,1				
12.	407,4				

Mittel aus beiden Beobachtungsreihen: $\alpha = 0,0725$.

VI. Kupfer mit 2,35 Proc. Phosphor (Stab Nr. 5).

Durchmesser = 5,38 mm.

Mittel aus 14 Beobachtungen.

1.	24,0	α
2.	40,4	
3.	56,4	$d = 5 \text{ cm}$ 0,0808
4.	78,5	0,0806
5.	100,5	$d = 4 \text{ cm}$ 0,0803
6.	125,5	0,0825
7.	153,4	0,0826
8.	188,5	0,0820
9.	234,5	Mittel: 0,0815
10.	286,6	
11.	343,5	
12.	411,3	

VII. Kupfer mit 5,25 Proz. Phosphor (Stab Nr. 6).

Durchmesser = 5,19 mm.

Mittel aus 6 Beobachtungen.			Mittel aus 6 Beobachtungen.		
1.	9,4		1.	5,0	
2.	23,4	α	2.	15,4	α
3.	35,5	$d = 5 \text{ cm } 0,1111$	3.	30,0	$d = 5 \text{ cm } 0,1160$
4.	53,4	0,1060	4.	45,0	0,1112
5.	71,5	$d = 4 \text{ cm } 0,1024$	5.	63,0	$d = 4 \text{ cm } 0,1092$
6.	90,2	0,1103	6.	82,8	0,1137
7.	120,9	0,1094	7.	110,2	0,1171
8.	158,4	0,1045	8.	144,7	0,1117
9.	202,0	Mittel: 0,1073	9.	190,3	Mittel: 0,1132
10.	258,4		10.	249,6	
11.	339,9		11.	331,5	
12.	422,0		12.	411,6	

Mittel aus beiden Beobachtungsreihen: $\alpha = 0,1102$.

VIII. Kupfer mit 1,04 Proc. Arsen (Stab Nr. 1').

Durchmesser = 5,28 mm.

Mittel aus 6 Beobachtungen.			Mittel aus 6 Beobachtungen.		
1.	101,9		1.	103,6	
2.	129,3	α	2.	132,1	α
3.	154,9	$d = 5 \text{ cm } 0,0376$	3.	157,6	$d = 5 \text{ cm } 0,0358$
4.	182,5	0,0452	4.	184,6	0,0415
5.	209,8	$d = 4 \text{ cm } 0,0336$	5.	212,4	$d = 4 \text{ cm } 0,0312$
6.	240,6	0,0371	6.	240,9	0,0383
7.	272,0	0,0392	7.	270,8	0,0417
8.	302,9	0,0505	8.	303,0	0,0443
9.	337,9	Mittel: 0,0405	9.	338,9	Mittel: 0,0388
10.	380,2		10.	380,0	
11.	425,0		11.	424,5	
12.	490,0		12.	472,5	

Mittel aus beiden Beobachtungsreihen: $\alpha = 0,0397$.

IX. Kupfer mit 1,80 Proc. Arsen (Stab Nr. 2').

Durchmesser = 5,01 mm.

Mittel aus 6 Beobachtungen.

	π
1. 79,4	
2. 109,7	$d = 5 \text{ cm } 0,0460$
3. 136,9	0,0550
4. 171,1	$d = 4 \text{ cm } 0,0423$
5. 212,4	0,0394
6. 250,2	0,0547
7. 278,7	0,0564
8. 322,6	Mittel: 0,0490
9. 378,1	
10. 424,0	
11. 492,6	
12. 563,2	

Mittel aus 6 Beobachtungen.

	π
1. 64,0	
2. 88,0	$d = 5 \text{ cm } 0,0467$
3. 108,3	0,0497
4. 136,5	$d = 4 \text{ cm } 0,0387$
5. 171,7	0,0434
6. 201,5	0,0485
7. 230,1	0,0536
8. 260,6	Mittel: 0,0468
9. 301,4	
10. 347,6	
11. 398,6	
12. 449,5	

Mittel aus beiden Beobachtungsreihen: $\pi = 0,0479$.

X. Kupfer mit 2,66 Proc. Arsen (Stab Nr. 3').

Durchmesser = 5,24 mm.

Mittel aus 6 Beobachtungen.

	π
1. 54,3	
2. 76,5	$d = 5 \text{ cm } 0,0582$
3. 101,4	0,0575
4. 127,0	$d = 4 \text{ cm } 0,0517$
5. 154,4	0,0562
6. 183,4	0,0598
7. 217,1	0,0586
8. 253,7	Mittel: 0,0570
9. 292,2	
10. 340,5	
11. 398,0	
12. 456,2	

Mittel aus 6 Beobachtungen.

	π
1. 54,9	
2. 80,5	$d = 5 \text{ cm } 0,0578$
3. 106,6	0,0600
4. 135,0	$d = 4 \text{ cm } 0,0539$
5. 165,2	0,0548
6. 199,4	0,0604
7. 234,0	0,0610
8. 274,4	Mittel: 0,0580
9. 317,1	
10. 370,1	
11. 435,6	
12. 502,8	

Mittel aus beiden Beobachtungsreihen: $\pi = 0,0575$.

XI. Kupfer mit 3,00 Proc. Arsen (Stab Nr. 4').

Durchmesser = 5,18 mm.

Mittel aus 6 Beobachtungen.			Mittel aus 6 Beobachtungen.		
1.	49,0	α	1.	45,9	α
2.	75,0	$d = 5 \text{ cm}$ 0,0572	2.	70,0	$d = 5 \text{ cm}$ 0,0597
3.	100,1	0,0584	3.	93,7	0,0579
4.	127,6	$d = 4 \text{ cm}$ 0,0575	4.	119,6	$d = 4 \text{ cm}$ 0,0604
5.	154,9	0,0569	5.	151,2	0,0577
6.	189,5	0,0590	6.	186,1	0,0571
7.	223,7	0,0585	7.	223,9	0,0565
8.	263,4	Mittel: 0,0579	8.	263,8	Mittel: 0,0582
9.	305,2		9.	304,5	
10.	357,2		10.	356,0	
11.	415,1		11.	417,6	
12.	477,4		12.	481,0	

Mittel aus beiden Beobachtungsreihen: $\alpha = 0,0581$.

XII. Kupfer mit 5,02 Proc. Arsen (Stab Nr. 5').

Durchmesser = 5,08 mm.

Mittel aus 6 Beobachtungen.			Mittel aus 6 Beobachtungen.		
1.	8,0	α	1.	11,0	α
2.	23,0	$d = 5 \text{ cm}$ 0,0964	2.	26,0	$d = 5 \text{ cm}$ 0,0947
3.	38,6	0,1011	3.	41,4	0,0976
4.	55,0	$d = 4 \text{ cm}$ 0,0844	4.	57,4	$d = 4 \text{ cm}$ 0,0887
5.	74,5	0,0919	5.	75,6	0,0920
6.	96,0	0,1037	6.	98,1	0,0980
7.	118,5	0,1044	7.	123,7	0,1012
8.	149,6	Mittel: 0,0970	8.	154,1	Mittel: 0,0954
9.	188,3		9.	193,5	
10.	242,0		10.	245,0	
11.	315,0		11.	313,8	
12.	393,5		12.	394,6	

Mittel aus beiden Beobachtungsreihen: $\alpha = 0,0962$.

In der folgenden Tabelle sind die Werte von α , λ/α , s/q und den Durchmessern in Millimetern = D , die die Berechnung für die einzelnen Stäbe ergab, eingetragen:

Stab	α	D	$\frac{s}{q}$	$\frac{\lambda}{\alpha}$	Procentgehalt an P oder As
Nr. 0	0,0218	5,21 ¹⁾	0,7678	304,14	0,00 Proc. P
„ 1	0,0440	5,13	0,7797	76,06	0,34
„ 2	0,0557	5,08	0,7952	48,36	0,87
„ 3	0,0601	5,34	0,7491	89,11 (31,0)	1,79
„ 4	0,0725	5,37	0,7449	26,71	2,08
„ 5	0,0815	5,38	0,7435	21,18	2,35
„ 6	0,1102	5,19	0,7707	11,96	5,25
„ 1'	0,0397	5,28	0,7576	90,85	1,04 Proc. As
„ 2'	0,0479	5,01	0,7984	65,74	1,80
„ 3'	0,0575	5,24	0,7634	43,56	2,66
„ 4'	0,0581	5,18	0,7722	43,22	3,00
„ 5'	0,0962	5,08	0,7874	16,05	5,02

Aus der Tabelle ergibt sich ein stetiges Abnehmen der Leitfähigkeiten $= \lambda$ mit wachsendem Phosphor- bez. Arsen-Gehalt. Trägt man die Resultate graphisch ein, so zeigt der Stab Nr. 3 eine Abweichung im glatten Verlauf der Curve. Aus der Curve würde sich der in Klammern beigefügte Wert ergeben. Ich halte diesen für den wahrscheinlicheren Wert von λ/α , während die beobachteten Störungen vielleicht durch Inhomogenität dieses Stabes hervorgebracht sind.

Da es im Folgenden immer nur auf die Verhältnisse der inneren Wärmeleitfähigkeiten der Stäbe ankommt, so ist es bequem, alle Zahlen auf den Wert $\lambda:\alpha=100$ zu reduciren. Man erhält dann folgende Tabelle:

Stab	$\lambda:\alpha$	Stab	$\lambda:\alpha$
Nr. 0	100	Nr. 0	100
„ 1	25	„ 1'	30
„ 2	16	„ 2'	21,6
„ 3	14 (10,2)	„ 3'	14,3
„ 4	9	„ 4'	14,2
„ 5	7	„ 5'	5,3
„ 6	4		

Die Resultate werden durch die Curven λ Fig. 5 und 6, p. 425 graphisch dargestellt, wobei in Fig. 5 für den Stab 3 der in Klammern gesetzte Wert benutzt ist.

1) Hier ist der mittlere Durchmesser der beiden reinen Kupferstäbe Nr. 0 und Nr. 0' genommen.

II. Plattenmethode.

Um eine gute Controle über die erlangten Resultate der Wärmeleitfähigkeit zu haben, bediente ich mich ferner der Voigt'schen Isothermenmethode¹⁾; zu diesem Zwecke hatte ich mir gleichzeitig mit den Stäben Platten von denselben Legirungen wie diese giessen lassen.

Die Theorie dieser Methode sagt aus, dass die Leitfähigkeiten λ_1 und λ_2 zweier Substanzen 1 und 2, die in einer Grenzlinie = s zusammenstossen, sich verhalten wie die Tangenten der Winkel, welche die Isothermen in jeder der Substanzen mit der Grenzlinie = s bilden.

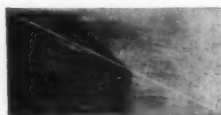


Fig. 3.

Zweckmässig lässt man die beiden Substanzen eine rechteckige Doppelplatte zusammensetzen (Fig. 3). Ist abc eine Isotherme, wie sie z. B. als Schmelzcurve eines geeigneten Wachsüberzuges sichtbar gemacht werden kann, so ist also:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2}.$$

Um das Verhältniss der Leitfähigkeiten möglichst gut bestimmen zu können, war das Seitenverhältniss der Platten ungefähr dem Wärmeleitfähigkeitsverhältniss gleich gemacht worden²⁾; die einzelnen Platten wurden so zusammengestellt: reines Kupfer wurde mit der bestleitenden Phosphor-bez. Arsen-Bronze, diese mit der nächstbestleitenden etc. verbunden und das Tangentenverhältniss bestimmt. Bei dieser Methode ist als Nachteil zu bedenken, dass sich bei den Beobachtungen an der ersten Platte (Nr. 0 mit Nr. 1) gemachte Beobachtungsfehler zu denen an der zweiten Platte etc. addiren; dieser Nachteil wird aber durch das günstigere Winkelverhältniss aufgehoben, welches solche der Reihe nach zusammengesetzte Platten bieten. Verbunden wurden die Platten durch ein möglichst feines Zinnlot und dann gut polirt; war dieses Lot nicht fein genug, was sich sofort dadurch bemerkbar

1) W. Voigt, Wied. Ann. 60. p. 350 ff. 1897.

2) W. Voigt, Wied. Ann. 64. p. 97. 1898.

machte, dass die Isothermen von zwei Punkten der Diagonale ausgingen, so wurde es erneuert.

Eine so hergestellte Doppelplatte wurde nun mit einem frischen Gemisch von absolutem Alkohol und Elaidinsäure (am besten war: 5 ccm abs. Alkohol und 0,35 g Elaidinsäure) stark mit einem Pinsel befeuchtet und dann stark, aber möglichst gleichmässig angeblasen, sodass der Alkohol schnell verdunstete und sich möglichst kleine Elaidinsäurekrystalle bilden konnten; während dieses Verfahrens lag die Platte auf einem mit Papier belegten Holzblock; an den Stellen, wo die Platte nicht auf dem Papier lag, bildeten sich helle Flecke aus und der Ueberzug musste erneuert werden. Diese Platte wurde nun mit der kurzen Seite des besser leitenden Materiales an einen auf ca. 100° C. erhitzten, ebenfalls gut polirten Kupferblock angelegt und wenn die Elaidinsäure bis zu einem bestimmten Punkte der Diagonale abgeschmolzen war, auf einer dicken, ebenen Eisenplatte schnell abgekühlt. Durch dieses Verfahren wurden Isothermen auf die Platte aufgezeichnet, die an Schärfe nichts zu wünschen übrig liessen und deren Knickungswinkel zur Diagonale sehr genau bestimmt werden konnten. Eine Platte mit solchem Isothermenpaar hat zu beiden Seiten desselben völlig verschiedenes Aussehen: soweit die Wärme in ihr sich fortgepflanzt hat, ist die Elaidinsäure scheinbar beinahe gänzlich verschwunden, man sieht eine blanke Metallfläche; wo die Wärme keinen Einfluss hatte, ist die Platte weiss und hat das Aussehen, als wäre sie bereift.

Bei den folgenden Beobachtungen sind die Winkel φ_1 und φ_2 auf jeder Platte an drei verschiedenen Stellen, in der Mitte und je einer gleich weit rechts und links davon, je 12 mal gemessen worden, so dass also das Tangentenverhältnis aus diesen 36 beobachteten Isothermen mit hinreichender Sicherheit angegeben werden kann. Bemerken will ich hier noch, dass die endgültige Feststellung der Isothermen und der Diagonale stets einer je zehnmaligen Einstellung des Fadekreuzes bedurfte.

Zur Beobachtung selbst ward der drehbare Tisch eines Polarisationsapparates benutzt, dessen Nicols entfernt waren und bei dem das Mikroskop durch ein Fernrohr ersetzt war, welches eine ungefähr vierfache Vergrösserung gewährte.

Es wurden folgende Platten benutzt:

Reines Kupfer (gegossen)	Platte Nr. 0
Kupfer mit 0,30 Proc. Phosphor	„ „ 1
„ „ 0,76 „ „	„ „ 2
„ „ 1,19 „ „	„ „ 3
„ „ 1,56 „ „	„ „ 4
„ „ 1,73 „ „	„ „ 5
„ „ 3,15 „ „	„ „ 6
Kupfer mit 1,99 Proc. Arsen	Platte Nr. 1'
„ „ 2,78 „ „	„ „ 2'
„ „ 4,83 „ „	„ „ 3'

Es ergaben sich folgende Resultate:

Phosphor-Kupfer.

1. Platte Nr. 0 mit Nr. 1 combinirt:

	links	Mitte	rechts	Mittel
$\frac{\text{tg } \varphi_0}{\text{tg } \varphi_1} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} =$	2,36	1,96	1,78	2,03

Dieselbe Platte von neuem gelötet, um zu sehen, was das Lot ausmacht:

	links	Mitte	rechts	Mittel
$\frac{\text{tg } \varphi_0}{\text{tg } \varphi_1} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} =$	2,16	1,97	1,79	1,97

Für dieselbe Platte ergab sich als Mittelwert von 12 Beobachtungen, die an beliebigen Stellen gemacht worden waren:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{\text{tg } \varphi_0}{\text{tg } \varphi_1} = 2,01.$$

2. Platte Nr. 1 mit Platte Nr. 2:

	links	Mitte	rechts	Mittel
$\frac{\text{tg } \varphi_1}{\text{tg } \varphi_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} =$	2,03	2,08	2,02	2,04

3. Platte Nr. 2 mit Platte Nr. 3:

	links	Mitte	rechts	Mittel
$\frac{\text{tg } \varphi_2}{\text{tg } \varphi_3} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} =$	1,51	1,36	1,36	1,41

4. Platte Nr. 3 mit Platte Nr. 4:

	links	Mitte	rechts	Mittel
$\frac{\text{tg } \varphi_3}{\text{tg } \varphi_4} = \frac{\lambda_3}{\lambda_4} =$	1,27	1,26	1,36	1,30

5. Platte Nr. 4 mit Platte Nr. 5:

	links	Mitte	rechts	Mittel
$\frac{\text{tg } \varphi_4}{\text{tg } \varphi_5} = \frac{\lambda_4}{\lambda_5} = 1,22$		1,18	1,26	1,22

6. Platte Nr. 5 mit Platte Nr. 6:

$\frac{\text{tg } \varphi_5}{\text{tg } \varphi_6} = \frac{\lambda_5}{\lambda_6} = 1,82$	1,82	1,82 _s	1,82
--	------	-------------------	------

Arsen-Kupfer.

7. Platte Nr. 0 mit Platte Nr. 1':

	links	Mitte	rechts	Mittel
$\frac{\text{tg } \varphi_0}{\text{tg } \varphi_1} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = 8,07$		2,48	3,22	2,92

8. Platte Nr. 1' mit Platte Nr. 2':

$\frac{\text{tg } \varphi_1'}{\text{tg } \varphi_2'} = \frac{\lambda_1'}{\lambda_2'} = 1,44$	1,40	1,43	1,42
--	------	------	------

9. Platte Nr. 2' mit Platte Nr. 3':

$\frac{\text{tg } \varphi_2'}{\text{tg } \varphi_3'} = \frac{\lambda_2'}{\lambda_3'} = 2,51$	2,39	2,46	2,45
--	------	------	------

Setzt man nun die Leitfähigkeit des reinen Kupfers gleich 100, so ergeben sich aus obigen Resultaten folgende Leitfähigkeiten der Legirungen:

Phosphor-Kupfer:		λ	Arsen-Kupfer:		λ
Platte Nr. 0	. . .	100	Platte Nr. 0	. . .	100
" " 1	. . .	49,8	" " 1'	. . .	34,3
" " 2	. . .	24,4	" " 2'	. . .	24,1
" " 3	. . .	17,3	" " 3'	. . .	9,8
" " 4	. . .	13,3			
" " 5	. . .	10,9			
" " 6	. . .	6,0			

Die Resultate sind graphisch dargestellt in den Curven λ auf Figg. 7 und 8, p. 425. Dass diese Curven nicht mit den obigen Curven λ auf Figg. 5 und 6 zusammenfallen, hat wahrscheinlich darin seinen Grund, dass der Kupferstab gezogen,

während die reine Kupferplatte gegossen war; ferner wird auch die verschiedene Bearbeitung der Stäbe und Platten, erstere waren abgefraist, letztere abgehobelt, nicht ohne Einfluss auf das Resultat gewesen sein.

Zur Controle wurde noch combinirt:

10. Platte Nr. 0 mit Platte Nr. 3'. Es ergab sich hier:

	links	Mitte	rechts	Mittel
$\frac{\text{tg } \varphi_0}{\text{tg } \varphi_3} = \frac{\lambda_0}{\lambda_3} =$	8,86	7,89	9,11	8,62

Dass dieser Wert so schlecht mit dem durch die aufeinander folgenden Beobachtungen (Nr. 0 mit Nr. 1'), (Nr. 1' mit Nr. 2'), (Nr. 2' mit Nr. 3') gefundenen Wert 10,17 übereinstimmt, wird wohl ohne Zweifel nur von dem ungünstigen Winkelverhältnis

$$\varphi_0 = 67^\circ \text{ bis } 73^\circ, \quad \varphi_3' = 14^\circ \text{ bis } 18^\circ$$

herrühren.

Es ist zu bemerken, dass die Resultate für die Wärmeleitfähigkeit der Arsenplatten ziemlich unsicher sind und wesentlich ungenauer als die Resultate, welche an den Stäben und den Phosphorplatten gewonnen wurden, weil schon der Sprung in der Wärmeleitfähigkeit des reinen Kupfers und der Platte Nr. 1' zu gross war. Leider war eine Platte, die einen geringeren Procentgehalt an Arsen hatte, als die Platte Nr. 1', zu diesen Messungen gänzlich untauglich, da sie zu grosse Gussblasen hatte.

Elektrische Leitfähigkeit.

Zur Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit der Stäbe und Platten bediente ich mich einer Nullmethode. Die Spulen eines Thomson'schen Galvanometers sind gegeneinander geschaltet und liegen im Nebenschluss; die eine Spule ist stets mit dem reinen Kupferstab (Platte), die andere mit der zu untersuchenden Bronze verbunden. Der Nebenschluss wurde für jeden Stab durch eine Ebonitklemme von geeigneter Form bewirkt.

Der Kupferstab (Platte) und der zu untersuchende Bronze-
stab (Platte) lagen im Hauptschluss, sie waren durch einen
ebenso starken Draht, als der Zuleitungsdraht war, verbunden.
Erst hatte ich beide Stäbe direct aneinander gelötet, das gab
aber starke Störungen, da sich die Lötstellen, an denen die
Zuleitungsdrähte einmündeten und die eine Verbindungslöt-
stelle der Stäbe durch den elektrischen Strom ungleich er-
wärmten und abkühlten, was thermoelektrische Strömungen
zur Folge hatte; diese wurden durch den dünnen Verbindungs-
draht vermieden, da jetzt vier gleiche Lötstellen vorhanden
waren. Durch den Hauptstromkreis wurde ein Strom von
4 Amp. geschickt, der einer Accumulatorenbatterie entnommen,
also fast constant war. In dem Nebenschlusskreise, der von
der zu untersuchenden Bronze ausging, war ein Stöpselrheostat
eingeschaltet; der ganze Aufbau
war demnach der nachstehende
(vgl. Fig. 4).

Beobachtet (bez. interpolirt)
wurde der Widerstand w_0 , wel-
cher im Rheostaten R die Null-
lage des Galvanometers G her-
beiführte.

Während die Klemme, in der
der reine Kupferstab (Platte) lag,
immer in derselben Lage liegen
blieb, wurde die, in der der
Bronzestab (Platte) befestigt war,
nach jeder Untersuchung ver-
schoben und der Widerstand von neuem gemessen; es wurden
diese mehrfachen Untersuchungen gemacht, um die Homo-
genität der Stäbe (Platten) zu controliren. Im ganzen wurde
der Nullwiderstand $= w_0$ für jeden Bronzestab 4 mal, für jede
Bronzeplatte, da sie kürzer als die Stäbe waren, 3 mal gemessen
und aus diesen Messungen das Mittel gezogen.

In der beistehenden Tabelle sind die Nullwiderstände $= w_0$,
welche erhalten wurden, falls der Strom an verschiedenen
Stellen des Stabes (Platte) abgezweigt wurde, und die Quer-
schnitte $= q$ der Stäbe und Platten verzeichnet.

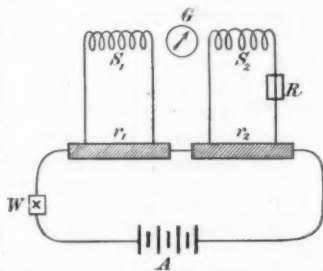


Fig. 4.

G = Galvanometer. S_1 und S_2 = dessen
Spulen. R = Rheostat. r_1 = Kupferstab.
 r_2 = Bronzestab. W = Stromwender.
 A = Accumulatorenbatterie.

A. Stäbe.

Nr.	q	w_0				Mittel
0	0,198 qcm	—	—	—	—	—
1	0,207 „	3,65 Ω	3,62 Ω	3,59 Ω	3,55 Ω	3,60 Ω
2	0,199 „	9,03	9,08	9,31	9,75	9,29
3	0,224 „	14,16	14,29	14,32	—	14,26
5	0,227 „	18,92	18,88	18,87	18,75	18,86
6	0,212 „	39,30	39,15	39,37	39,17	39,25
1'	0,219 „	3,28	3,36	3,31	3,26	3,30
2'	0,197 „	7,06	7,18	7,35	7,44	7,25
3'	0,216 „	9,92	9,82	9,86	9,91	9,88
4'	0,211 „	12,25	12,23	12,13	12,23	12,21
5'	0,203 „	35,20	34,47	34,21	34,00	34,47

B. Platten.

Nr.	q	w_0			Mittel
0	0,0413 qcm	—	—	—	—
1	0,0453 „	1,22 Ω	1,19 Ω	1,20 Ω	1,21 Ω
2	0,0520 „	3,97	3,85	3,80	3,87
3	0,0514 „	6,58	6,49	6,45	6,51
4	0,0500 „	8,63	8,69	8,68	8,67
5	0,0550 „	8,19	8,24	8,13	8,19
6	0,0480 „	23,67	24,74	25,08	24,49
1'	0,0465 „	—	2,99	2,97	2,98
3'	0,0441 „	20,74	20,70	20,43	20,62

Bemerken will ich hier noch, dass bei der Stromzuführung durch die Platten die Platinspitzen, welche zum Nebenschluss führten, mindestens 1 cm vom Zuleitungsdraht entfernt aufgesetzt wurden, nachdem ich mich vorher mit Hilfe einer kleinen Klemme mit nur 2 cm Spitzenabstand überzeugt hatte, dass es in dem Bereiche, je 1 cm rechts und links vom Ende der Platte entfernt, gleichgültig war, wo die Platinspitzen aufgesetzt wurden; selbstverständlich wurde der Platinspitzenabstand möglichst parallel der Längsaxe der Platte gemacht.

Nachdem nun alle diese Widerstände bestimmt waren, bedurfte es noch mehrerer anderer Bestimmungen, deren Resultate mit in Rechnung zu ziehen sind; es mussten noch die Widerstände der Galvanometerspulen, der Zuleitungsdrähte und noch eine Galvanometer-Constante bestimmt werden, die sich aus der Ungleichheit der beiden Spulen ergab.

Was die Bestimmung des Gesamtwiderstandes des Galvanometers, sowie der einzelnen Spulen betraf, so musste ich mich der Wheatstone'schen Brücke bedienen; als Untersuchungs-galvanometer benutzte ich ein G. Wiedemann'sches. Es ergab sich:

Gesamtwiderstand	= 5,890 Ω
Widerstand der rechten Spule	= 3,000 „
Widerstand der linken Spule	= 2,895 „

Dabei ist noch zu bemerken, dass die rechte Spule stets mit dem reinen Kupfer-, die linke mit dem Bronze-Stab (Platte) verbunden war.

Der Widerstand der Zuleitungsdrähte und der Klemmen wurde auch mit Hülfe der Wheatstone'schen Brücke gemessen; die Galvanometerspulen wurden dabei hintereinander geschaltet. Es ergab sich für die Zuleitungsdrähte und Klemme der rechten Spule ein Widerstand von 0,1081 Ohm, für die der linken ein solcher von 0,1191 Ohm. Wir haben demnach in sämtlichen Rechnungen, wo der Widerstand der Spulen vorkommt, zu diesen den Widerstand der Leitung addirt und erhalten:

für die rechte Spule = g_1 den Widerstand = $w_1 = 3,108 \Omega$
 für die linke Spule = g_2 den Widerstand = $w_2 = 3,014 \Omega$.

Wenn die beiden Spulen von demselben Strom durchflossen wurden, so ergab sich nicht derselbe Ausschlag. Durch besondere Versuche wurde festgestellt, dass die Spule 2 im Verhältnis $k:1$ stärker wirkte, als die Spule 1. Es wurde gefunden $k = 1,18$ für Stäbe; bei der Untersuchung der Platten musste diese Constante, da das Galvanometer anders aufgestellt worden war, nochmals bestimmt werden, es ergab sich $k = 1,21$.

Für den Ausschlag Null muss also sein:

$$i_1 = k \cdot i_2,$$

falls i_1 und i_2 die Ströme in den Spulen 1 und 2 sind.

Nennt man die zu messenden Widerstände (vgl. Fig. 4) r_1 und r_2 , so ergibt eine einfache Rechnung, da die r_1 und r_2 gegen die w_1 und w_2 zu vernachlässigen waren¹⁾

$$\frac{r_1}{r_2} = k \cdot \frac{w_1}{w_2 + w_0}.$$

1) Beim reinen Kupferstab war der Widerstand = 0,000073 Ω , bei der reinen Kupferplatte war er = 0,00027 Ω .

Nennt man nun die Leitfähigkeiten des rechten Stabes (Platte) = σ_0 , die des linken = σ , ferner l_1 und l_2 die Distanzen der Abzweigstellen in beiden Stäben (Platten) [$l_1 = 9,96$ cm, $l_2 = 6,95$ cm für die Stäbe, $l_1 = 7,75$ cm, $l_2 = 5,20$ cm für die Platten], so folgt:

$$r_1 = \frac{l_1}{q_1 \cdot \sigma_0}, \quad r_2 = \frac{l_2}{q_2 \cdot \sigma}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{\sigma}{\sigma_0} = k \cdot \frac{q_1}{q_2} \cdot \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{w_1}{w_2 + w_0}.$$

Nach dieser Formel berechnet, wurden die folgenden Werte erhalten:

A. Stäbe.

1. Phosphor-Kupfer.

Nr. 1	$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 0,3665$
„ 2	„ = 0,2055
„ 3	„ = 0,1299
„ 5	„ = 0,1011
„ 6	„ = 0,0562

2. Arsen-Kupfer.

Nr. 1'	$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 0,3622$
„ 2'	„ = 0,2482
„ 3'	„ = 0,1807
„ 4'	„ = 0,1566
„ 5'	„ = 0,0661

Anmerkung. Der Stab Nr. 4 war bei einer Wärmeleitfähigkeitsuntersuchung zerbrochen.

B. Platten.

1. Phosphor-Kupfer.

Nr. 1'	$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 0,5451$
„ 2'	„ = 0,2910
„ 3'	„ = 0,2130
„ 4	„ = 0,1785
„ 5	„ = 0,1692
„ 6	„ = 0,0881

2. Arsen-Kupfer.

Nr. 1'	$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 0,3738$
„ 3'	„ = 0,09998

Anmerkung. Es konnten nur die beiden Platten 1' und 3' auf elektrische Leitfähigkeit untersucht werden, da die übrigen zu grosse Gussblasen hatten.

Setzen wir die elektrische Leitfähigkeit des reinen Kupfers = 100, so folgt:

A. Stäbe.

1. Phosphor-Kupfer.

Nr. 0	100
„ 1	36,7
„ 2	20,6
„ 3	13,0
„ 5	10,1
„ 6	5,6

2. Arsen-Kupfer.

Nr. 0	100
„ 1'	36,2
„ 2'	24,8
„ 3'	18,1
„ 4'	15,7
„ 5'	6,6

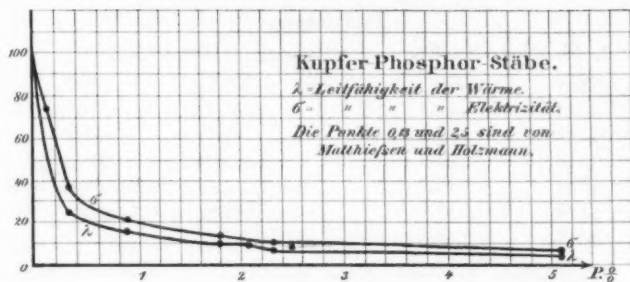


Fig. 5.

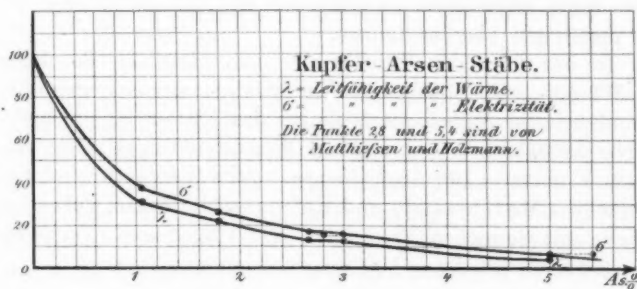


Fig. 6.

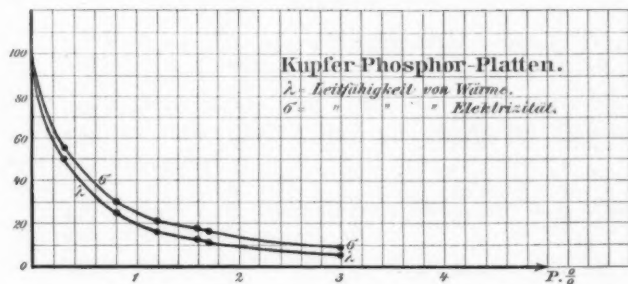


Fig. 7.

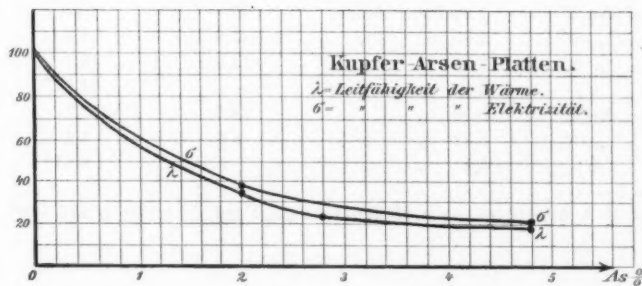


Fig. 8.

B. Platten.

1. Phosphor-Kupfer.

Nr. 0	100
„ 1	54,5
„ 2	29,1
„ 3	21,3
„ 4	17,9
„ 5	16,9
„ 6	8,8

2. Arsen-Kupfer.

Nr. 0	100
„ 1'	37,4
„ 3'	10,0

Anmerkung. In den Figg. 8 bis 11 sind diese Resultate durch die Curven = σ graphisch dargestellt.

Vergleichen wir nun diese Resultate mit den von Matthiessen¹⁾ gefundenen, so sehen wir aus der Curve, dass sie mit diesen gut übereinstimmen.

In der folgenden Tabelle sind nun sämtliche Resultate für Wärme- und Elektricitäts-Leitfähigkeit zusammengestellt; sowohl bei den Stäben als auch bei den Platten ist die elektrische Leitfähigkeit = σ und die Wärmeleitfähigkeit = λ des reinen Kupfers = 100 angenommen. Zum Vergleich sind die Zahlen von Matthiessen und Holzmann¹⁾, in nachstehender Tabelle mit Sternchen bezeichnet, mit eingetragen, nachdem sie auf reines Kupfer = 100 umgerechnet worden sind.

A. Stäbe.

Nr. 0	Procentgehalt		λ	σ
	0	Proc. Phosphor	100	100
a)	0,13	„ „	—	72,7*
Nr. 1	0,34	„ „	25	36,7
„ 2	0,87	„ „	16	20,6
„ 3	1,79	„ „	14 (10,2)	13,0
„ 4	2,08	„ „	9	—
„ 5	2,35	„ „	7	10,1
b)	2,5	„ „	—	7,77*
Nr. 6	5,25	„ „	4	5,6
Nr. 1'	1,04	Proc. Arsen	30	36,2
„ 2'	1,80	„ „	21,6	24,8
„ 3'	2,66	„ „	14,5	18,1
a')	2,8	„ „	—	14,12*
Nr. 4'	3,00	„ „	14,2	15,7
„ 5'	5,02	„ „	5,3	6,6
b')	5,4	„ „	—	6,63*

1) A. Matthiessen u. M. Holzmann, Pogg. Ann. 110. p 222. 1860.

B. Platten.

Nr. 0	Procentgehalt		λ	σ
	0	Proc. Phosphor	100	100
" 1	0,30	" "	49,8	54,5
" 2	0,76	" "	24,4	29,1
" 3	1,19	" "	17,3	21,3
" 4	1,56	" "	13,3	17,9
" 5	1,73	" "	10,9	16,9
" 6	3,15	" "	6,0	8,8
Nr. 1'	1,99	Proc. Arsen	34,3	38,0
" 2'	2,78	" "	24,1	—
" 3'	4,83	" "	9,8	10,0

Wie aus dieser Tabelle klar hervorgeht, nimmt das Wärmeleitvermögen des Kupfers durch geringe Verunreinigungen von Phosphor oder Arsen stärker ab, als das für Elektricität.

Die Correction des Wiedemann-Franz'schen Gesetzes findet also hier bei der Verunreinigung des Metalles durch Phosphor und Arsen gerade im entgegengesetzten Sinne statt, wie es kürzlich von Jaeger und Diesselhorst¹⁾ bei Mischungen von nur metallischen Bestandteilen gefunden wurde.

Der Verfasser ist dem inzwischen verstorbenen Director des physikalischen Institutes, Hrn. Geheimrat Prof. Dr. G. Wiedemann, sowie Hrn. Prof. Dr. P. Drude für die Anregung zu dieser Arbeit und die fördernden Ratschläge zu Dank verpflichtet.

1) W. Jaeger u. H. Diesselhorst, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1899. p. 719.

3. *Ein neues Barometer (Luftdruckaréometer); von Karl T. Fischer.¹⁾*

1. In neuerer Zeit hat das Barometer nicht nur mehr die Aufgabe zu erfüllen, Luftdruckbestimmungen an festem Ort und mit feststehendem Instrument zu liefern, sondern durch die vielfache Verwendung des Ballons zum Studium der Atmosphäre hat es die weitere Forderung zu befriedigen, auch im bewegten Ballon richtige Druckangaben zu ermöglichen. Das *Quecksilberbarometer*, welches in der Form des Sprung'schen Wagebarographen als Standinstrument die hohe Genauigkeit von $\pm 0,03$ mm liefert, ist für Ballonbestimmungen wenig brauchbar, weil die thatsächlich dort auftretenden Verticalbeschleunigungen des Ballons die Angaben der Quecksilbersäule um nicht weniger als 4—6 mm entstellen²⁾, was bei 600 mm Hg und einer entsprechenden Höhe von rund 2000 m einem Höhenfehler von 80 m entspricht. Die *Aneroidablesungen*, welche schon bei langsamen Aenderungen des Luftdruckes infolge der elastischen Nachwirkung schwer ermittelbare Fehler enthalten, sind bei den raschen Aenderungen im Ballon bis zu 3 und 5 mm falsch und in keiner Weise controlirbar.³⁾ ⁴⁾ Natürlich ist es überflüssig, die Genauigkeit der Druckbestimmung im Ballon zu weit zu steigern, wenn man sie zu Höhenbestimmungen verwenden will, weil hier schon die Unkenntnis der genauen Mitteltemperatur der Luftsäule und des

1) Ausführlich beschrieben in *Meteorologische Zeitschrift*, 6. Heft, p. 257—274. Juni 1900; dort ist auch der Literaturnachweis vollständiger erbracht.

2) L. Sohneke u. S. Finsterwalder, *Zeitschr. für Luftsch. u. Physik d. Atmosph.* 9. p. 177. 1894.

3) A. d. Bock, Jahresbericht des Münchener Vereins für Luftschiffahrt für 1891, Anlage II. 1892; im übrigen sei auf die vielfachen Aufsätze über *Aneroide*, welche in der *Zeitschrift für Instrumentenkunde* erschienen, verwiesen. — Ueber das Whymper'sche „Berganeroide“ fand ich keine weitere Notiz, als den Bericht über eine vorläufige Mitteilung in der *Zeitschr. f. Instrumentenk.* 19. p. 318. 1899.

4) S. Finsterwalder, *Illustr. Aeronaut. Mitteil.* p. 1 ff. 1899 und Jahresbericht des Münchener Vereins für Luftschiffahrt p. 33—36. 1898.

Barometerstandes an den Basisstationen eine Fehlerquelle bildet, indessen hat Hr. Finsterwalder darauf hingewiesen¹⁾, dass die hieraus entspringenden Fehler bei sorgfältig ausgeführten Ballonfahrten auf einen Betrag herabgedrückt werden können, welcher eine Genauigkeit der Druckbestimmung von mindestens 0,5 mm gerechtfertigt und angezeigt erscheinen lässt.

2. In neuester Zeit ist von Hrn. Finsterwalder die Photogrammetrie als ein Mittel angegeben worden, um genügend genaue Höhenangaben für den Ballon zu erreichen, ausserdem muss es wahrscheinlich erscheinen, dass wir noch ein nachwirkungsfreies Material für die Aneroidbüchsen finden werden — z. B. rein krystallisirende Substanzen wie Quarz —, allein zur Zeit haben wir noch kein Instrument, welches bei gleicher Empfindlichkeit wie das Quecksilberbarometer *frei von Nachwirkungen* ist und dessen Angaben *von den Verticalbeschleunigungen des Ballons unabhängig* ist. Durch die Herren Sohncke † und Finsterwalder angeregt, ein solches zu construiren, bin ich im Laufe der letzten acht Jahre zu den im Folgenden beschriebenen Formen gelangt, von denen jede vor dem Quecksilber- und Aneroidbarometer Vorzüge voraushaben dürfte.

Im Princip beruhen sie alle darauf, dass nach dem Mariotte'schen Gesetze *das Volumen eines Gases bei constant gehaltener Temperatur ein Maass für den äusseren Luftdruck giebt.*²⁾

3. Die erste Form, welche ich zunächst ausführte, war die schon von O. Kleinstück³⁾ benutzte und mittlerweile als Hefner-Alteneck'sches Variometer⁴⁾ bekannt gewordene Anordnung, welche gleichzeitig auch von M. Toepler⁵⁾ mit einer geistreichen Abänderung in Zusammenhang mit Beobachtungen von Windwogen beschrieben wurde. Da indessen diese In-

1) Vgl. Note 4 p. 428.

2) Vgl. F. E. Melde, Wied. Ann. 32. p. 659. 1887; C. Fischer, Inaug.-Diss., Marburg 1889 (Referat in Beibl. 1890).

3) O. Kleinstück, Zeitschr. f. prakt. Physik 3. p. 220. 1890.

4) F. v. Hefner-Alteneck, Wied. Ann. 57. p. 468—471. 1896.

5) M. Toepler, Wied. Ann. 57. p. 475. 1896. — Es ist übrigens das Mariotte'sche Gesetz in ähnlicher Weise bereits von Al. Adie zur Construction eines Schiffabarometers verwendet worden, Werner's Memoirs 3. p. 483—492. 1819, allerdings ohne dass für Constanthaltung der Temperatur besondere Vorkehrungen getroffen waren.

strumente nur zur Beobachtung rascher Druckschwankungen verwendbar sind, verliess ich diese Form sehr bald und wählte die Anordnung der Fig. 1, welche mir gleichzeitig dazu diente, zu prüfen, wie weit eine Constanthaltung der Temperatur im Innern der dreifach tubulirten Flasche auf längere Zeit möglich war. An dem in $\frac{1}{100}$ Grad Celsius eingetheilten Beck-

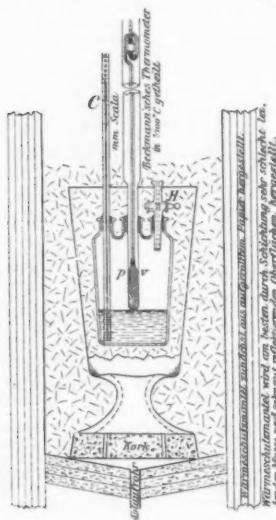


Fig. 1.

mann'schen Thermometer liess sich constatiren, dass innerhalb eines Monates sich die Temperatur im Innern noch nicht um $0,002^{\circ}$ C. änderte. Die tubulirte Flasche steht zunächst in einem mit Eis gefüllten Pokal, dessen Boden durchstossen ist, und dieser Pokal erst in einem weiteren Eisbehälter. Das im Pokal befindliche Eis hielt sich während der Beobachtung, ohne erneuert zu werden. Als Füllflüssigkeit, in welche die Capillare C eintauchte, verwendete ich mit Alkana gefärbtes Petroleum, das viel weniger leicht verdunstet als das von M. Toepler empfohlene Xylol. Hahn H diente zur passenden Einstellung des Petroleumfadens in der Capillaren. Der Inhalt der Flasche war 175 ccm, von denen 55 ccm durch Petroleum ausgefüllt waren; 1 mm Quecksilbersäule Druckunterschied verursachte eine Verschiebung des Meniscus um 42 mm in der Capillaren, die 2,32 mm Durchmesser hatte. Eine Temperaturänderung von $0,001^{\circ}$ C. würde eine Verschiebung von $\frac{1}{10}$ mm hervorrufen.

Das Instrument erwies sich als sehr brauchbar, um selbst kleine und rasche Druckschwankungen, wie sie namentlich bei Gewittern vorkommen, und geringe Höhenunterschiede zu messen; es ist aber als transportables Instrument nicht brauchbar und ist von Verticalbeschleunigungen nicht unabhängig; ausserdem bildet für diese Form die Verdunstung und das Haftenbleiben von Petroleum in der Capillaren eine Fehler-

quelle, welche diese Anordnung mehr als Instrument zur Messung von Druckschwankungen innerhalb einiger Stunden als zur Verwendung im Ballon tauglich erscheinen lässt. Diese Mängel sind beseitigt oder erheblich verringert in der folgenden Form, die ich als „Luftdruckaräometer“ bezeichnen möchte.

4. Sucht man den Gedanken zu verwirklichen, statt die *Volumenänderung* des abgesperrten Gases direct zu messen, die *Gewichtsänderung* zu bestimmen, welche diese Volumenänderung in einer Flüssigkeit zur Folge haben muss, falls das durch den Luftdruck bei constant 0° C. zu *verändernde Volumen* in der Flüssigkeit einen *sich ändernden Auftrieb* erzeugt, so wird man auf den Cartesiani'schen Taucher geführt; es ist dieser indessen nicht zu Messungen verwendbar, weil seine Gleichgewichtslage eine labile ist. Es wird dieselbe aber sofort stabil, wenn man ihn nach Art der Aräometer mit einem Ansatzcylinder versieht, der über die Flüssigkeitsoberfläche hinausragt (Fig. 2).

Die Gleichgewichtslage dieses „Aräometers“ ist dadurch gegeben, dass das Gewicht des ganzen Aräometers gleich ist dem Auftrieb, welcher durch die von den eintauchenden Teilen verdrängte Flüssigkeit verursacht wird.

Vom Luftauftrieb des Halses werde abgesehen, Hals und Schwimmgefäß seien von cylindrischer Gestalt.

Bezeichnen nun v_0 das Volumen der abgegrenzten Luftmenge für p_0 als zugehörigen Druck (vom Dampfdruck werde abgesehen), ferner h_0 den Abstand des inneren vom äusseren Flüssigkeitsspiegel, b_0 den äusseren Luftdruck, so ist, falls wir uns b_0 sich ändernd (wachsend) denken auf b , die Folge die, dass durch Zusammendrückung der Luft im Schwimmer v_0 übergeht in $v < v_0$; gleichzeitig tritt Flüssigkeit an die Stelle der zurückweichenden Luft; der Auftrieb des Aräometers wird also geringer; da aber das Gewicht der flüssigkeitsfreien Teile gleich bleibt, so muss das Aräometer einsinken, bis vom

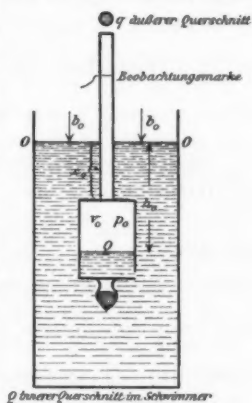


Fig. 2.

Hals ein entsprechendes Stück $(x - x_0)$ so viel Flüssigkeit verdrängt, als $(v_0 - v)$ vorher einnahm. Es muss also:

$$(I) \quad v_0 - v = (x - x_0) \cdot q$$

werden. Die freie Oberfläche OO bleibt also constant; der Druck der zusammengepressten Luft im Innern geht über von p_0 zu p ; da nun durch Senkung des ganzen Aräometers um $(x - x_0)$ der Spiegel der Flüssigkeit im Innern gesunken, infolge des Einstromens der Menge $(v_0 - v)$ Flüssigkeit aber etwas gestiegen ist, nämlich um so viel (H) , dass

$$v_0 - v = H \cdot Q = (x - x_0) q,$$

so ist h_0 gewachsen um:

$$(II) \quad h - h_0 = (x - x_0) \frac{Q - q}{Q}.$$

Infolge der Constanz der Temperatur gilt das Mariotte'sche Gesetz:

$$(III) \quad v \cdot p = v_0 p_0,$$

also auch

$$(IIIa) \quad p - p_0 = \frac{v_0 p_0}{v} - p_0 = p_0 \frac{v_0 - v}{v}$$

oder nach Substitution von (I):

$$(IIIb) \quad p - p_0 = p_0 \cdot \frac{(x - x_0) q}{v_0 - (x - x_0) q}.$$

Dabei ist aber:

$$(IV) \quad \begin{cases} p = b + h \cdot \frac{s}{\sigma}, \text{ wo } s = \text{spec. Gew. der Flüssigkeit,} \\ p_0 = b_0 + h_0 \cdot \frac{s}{\sigma}, \sigma = \text{spec. Gew. von Quecksilber bei } 0^\circ. \end{cases}$$

Daher folgt durch Substitution von (II) und (IIIb):

$$(V) \quad b - b_0 = (x - x_0) \left\{ \frac{p_0 \cdot q}{v_0 - (x - x_0) q} - \frac{s}{\sigma} \frac{Q - q}{Q} \right\}.$$

Obwohl sich in dieser Weise die Abhängigkeit der Einstellung des Aräometers vom äusseren Druck rechnerisch ermitteln lässt, ist es am zweckmässigsten, das wirklich ausgeführte Instrument empirisch zu aichen.

Gegenüber dem Quecksilberbarometer hat dieses „Luftdruckaräometer“ den für Luftballonzwecke so wichtigen Vorzug, dass seine Angaben von dem Werte der *Schwerebeschleunigung*

sowohl, wie von der *Beschleunigung*, die man dem *Apparate* selbst giebt, *unabhängig* ist, da Auftrieb und Gewicht des Aräometers in gleicher Weise von diesen Beschleunigungen beeinflusst werden. Man kann sich hiervon sehr leicht durch den Versuch überzeugen, indem man den Apparat in Bewegung versetzt und zum Vergleiche auch ein Quecksilberbarometer von der Wand nimmt und hebt und senkt; während beim Luftdruckeräometer dabei keine Verstellung eintritt, verschiebt sich im Quecksilberbarometer die Kuppe um 10—15 cm. Die Beobachtung des Instrumentes während Anfahrens und Anhaltens eines Fahrstuhles, der eine Beschleunigung ± 18 [cm/sec²] hatte, liess mich gleichfalls keinerlei Ausschlag erkennen. Dem Aneroidbarometer gegenüber hat es den Vorteil, keine Nachwirkung zu zeigen, wenn zur Füllung eine Flüssigkeit verwendet wird, welche nicht leicht verdampft und Luft nicht erheblich absorbiert. Destillirtes Wasser ist in dieser Beziehung dem Petroleum vorzuziehen.

5. *Versuche mit dem Luftdruckeräometer.* Dass das Luftdruckeräometer in dieser Form verwendbar sei, davon habe ich mich bereits 1896 durch mehr orientirende als genau messende Versuche überzeugt, welche ich mit einem für Hrn. Lektor Blinkhorn nach meinen Angaben hergestellten Instrumente anstellte. Zu einer eingehenderen Untersuchung dieser neuen Barometerform fand ich erst im letzten Jahre Zeit; im gleichen Jahre gab sich auch zum ersten Male Gelegenheit, das Instrument im *Luftballon* zu beobachten, und zwar während der am 10. Juni unter Führung des Hrn. Hauptmann Blanc von den Herren Professor Dr. Finsterwalder und Freiherrn von Bassus ausgeführten wissenschaftlichen Fahrt des Münchener Vereins für Luftschiffahrt.

Es entsprach das Instrument bei dieser Fahrt durchaus den Erwartungen, welche an dasselbe geknüpft waren, indem es sich unabhängig von den Beschleunigungen zeigte und rasch und aperiodisch einstellte. Fig. 3 giebt es im Maassstabe gezeichnet wieder. Das Aräometer wird, zu geeigneter Höhe mit destillirtem Wasser beschickt und mit Hg beschwert, in ein aus einem Rohre gefertigtes Gefäss *AA* mit Wasser eingesenkt und *AA* bis an den Rand gefüllt. *AA* ist in ein ähnliches zweites Gefäss *BB* eingesetzt. Oben ist *BB* in

eine ringförmige Platte R_1 eingelötet, und in der Mitte derselben eine Oeffnung ausgespart, welche gerade gestattet, den Cylinder AA in BB einzusetzen. Auf R_1 wird mittels Lederzwischenlage und Schrauben eine ähnliche zweite Scheibe R_2 aufgesetzt und zwar so, dass AA gegen BB hin wasserdicht abgeschlossen ist. Mit R_2 steht die Ablesemarke in fester

Verbindung, indem in R_2 zwei kurze Rohrstutzen EE eingelötet sind, die zwischen sich ein Glasrohr GG mit Siegelack oder Bleiglättekittdichtung aufnehmen. Auf GG ist eine feine Ringmarke MM eingätzt, an welcher die Stellung der Aräometerscala abgelesen wird. Dem Zwecke, den Glaskörper während des Transportes gegen Stoss zu schützen, dient der Korkanschlag K_1 am Boden von AA und ein in das Glasrohr einsetzbarer Gummipfropfen (P) — punktirt gezeichnet —, und schliesslich ist noch zum Schutze des Glasrohres eine Messingrohrkappe SS in R_2 eingeschraubt.

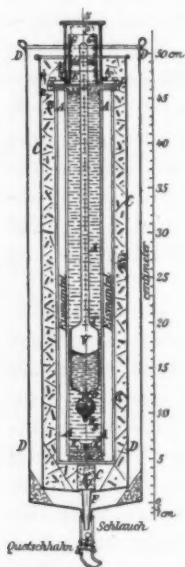


Fig. 3.

Um den Innenraum von AA auf *constanter Temperatur* zu halten, wird zwischen AA und BB , ähnlich wie beim Bunsen'schen Eiscalorimeter, ein Eismantel eingefroren und dieser Eismantel selbst wird durch das mit Eis gefüllte Gefäss CC gegen Schmelzen geschützt. Für die Zeit der Ablesung wird Gefäss BB etwas emporgehoben. CC ist durch ein weiteres Blechgefäss DD thermisch geschützt. Der Zwischenraum $C-D$ ist entweder mit Eis oder trockener Schafwolle oder sonst mit Isolirmaterial ausgefüllt. Die drei an DD angelöteten Haken dienen dazu, das Instrument im Ballon aufzuhängen.

Das Schmelzwasser wird durch den in F angesetzten Schlauch abgelassen oder es wird, falls die Aussentemperatur unter 0° sinkt, durch den Schlauch Schmelzwasser wieder zurücklaufen gelassen. K_1, K_2, K_3 stellen Korke vor.

Bei der mit *diesem* Instrumente gemachten Ballonfahrt am 10. Juni 1899 blieb die Innentemperatur während der

Fahrt während der 6 Stunden von früh 5 bis vormittags 11 Uhr, in denen Temperaturmessungen gemacht wurden, constant.

Aichtung des Luftdruckaräometers mit Hülfe eines Hg-Barometers und Vergleichung mit einem Bohne'schen compensirten Holostericbarometer. Die Schutzkappe *SS* ist abgenommen. An das Glasrohr *G* wird mittels Schlauchverbindung ein 30 cm langes Stück Glasrohr von gleicher Weite wie *G* angesetzt, damit am Ende dieses Ansatzrohres mittels Gummikorkes und Glasrohres eine Verbindung mit der Luftpumpe, dem Quecksilber- und Aneroidbarometer, welche alle miteinander und einem 80 Liter haltenden Glasballon in Communication stehen, bewerkstelligt werden kann.

In Zwischenräumen von 5 Minuten wurde der Druck geändert, erst von 720 mm auf 497 mm in 12 Stufen, sodann der Druck wieder erhöht in 11 Stufen und zum Schlusse wurden ohne Einhalten einer bestimmten Reihenfolge, abermals in Zeitintervallen von 5 Minuten, einzelne Mitteldrucke hergestellt. Um dafür zu sorgen, dass in dem Luftdruckaräometer das Wasser in allen Höhen gleiche Temperatur hatte, war es mittels zweier Hähne gesondert verschiedenen Drucken aussetzbar und konnte durch die mit den Druckschwankungen erzielten Verschiebungen des Aräometers „umgerührt“ werden, was von Zeit zu Zeit geschah.

Das Resultat der im ganzen 2 Stunden 15 Minuten beanspruchenden Messreihe ist in der Fig. 4 graphisch dargestellt. In derselben sind die Angaben des Quecksilberbarometers (reducirt) als Abscissen, die Angaben des Holostericaneroides und meines Instrumentes als Ordinaten aufgetragen. Die Angaben des letzteren sind in Millimetern der in das Stielrohr eingesetzten Scala angegeben. Die Empfindlichkeit war im Mittel 1 mm Scalenverschiebung pro 1 mm Druckänderung. Die Reihenfolge der beobachteten Punkte ist durch die beistehenden Ziffern gegeben. Die Curven lassen klar die elastische Nachwirkung im Aneroid ersehen und beweisen, dass mein Instrument an solchen Nachwirkungen nicht leidet.

Ich glaubte, diese Art eines Barometers sei gänzlich neu, wurde aber kürzlich von Hrn. Emden darauf aufmerksam gemacht, dass schon am Anfang des 18. Jahrhunderts von

einem Arzte Olivier¹⁾ eine im Princip gleiche Anordnung beschrieben wurde. Zur Verwendung scheint sie aber nicht gekommen zu sein, wohl deswegen, weil man in jener Zeit nicht so einfach wie jetzt mit Eis constante Temperatur herstellen konnte; es ist das Instrument deswegen unbrauchbar gewesen.

6. Während das Luftdruckaräometer in der beschriebenen Form für den Ballon sehr zweckmässig sein dürfte, muss es, um als empfindlicheres Standinstrument brauchbar zu werden,

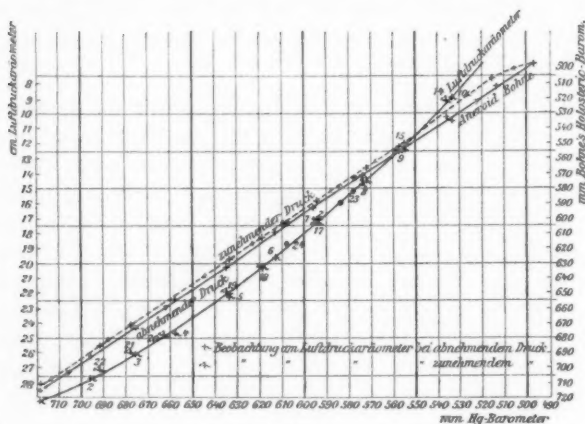


Fig. 4.

noch von den Fehlern befreit werden, welche es mit allen Aräometern gemeinsam hat und ferner muss auch die Wärmeleitung, welche durch den Stiel von dem Aussenraum nach innen erfolgt, verringert werden. Es gelingt dies ohne weitere Schwierigkeiten, wenn man den Schwimmer bei T abschmilzt, an einen feinen platinirten Platindraht knüpft und etwa mit Hülfe einer Mohr'schen Waage jeweils wiegt. Am besten würde sich dazu die von Bezold angegebene Ausführung derselben eignen, welche an einem Gradbogen Gewichte von 0,000 bis 10,00 g direct abzulesen gestattet und von Böhm & Wiedemann in München, Sonnenstrasse, hergestellt wird. Oder es

1) Olivier, Philosophical Transactions London 24. p. 1603. 1704 u. 1705 (auch in Gehler's Wörterbuch unter „Barometer“ angegeben).

kann das Gewicht des Schwimmers mit Hilfe einer Spiralfederwaage mit Zeiger und Scala bestimmt werden.¹⁾ Ein solches Spiralfederwaagebarometer hätte freilich für die Verwendung im Ballon den Mangel, dass seine Angaben von der Beschleunigung des Ballons und der Schwere abhängig sind; allein man braucht nur eine gleiche Federwaage mit einem constanten Gewicht belastet während der Fahrt zu beobachten, um sofort den Wert der Beschleunigung ermitteln zu können. Bei einer von Hrn. Ingenieur G. Hummel mir freundlichst zur Verfügung gestellten Spiralfederwaage konnte ein Gewicht von 10 g noch auf 0,02 g genau bestimmt werden.

München, Physik. Inst. d. Techn. Hochsch., August 1900.

1) K. T. Fischer, Meteorol. Zeitschr. l. c. p. 273 u. 274.

(Eingegangen 27. Juli 1900.)

**4. Beiträge zur Kenntnis
der Vorgänge in Inductionsapparaten;
von K. R. Johnson.**

Die besonders kräftigen Wirkungen der Inductionsapparate haben schon längst zu Untersuchungen derartiger Apparate aufgefordert, und es sind so viele Arbeiten darüber veröffentlicht worden, dass eine Uebersicht derselben uns allzu weit von dem Zwecke der vorliegenden Arbeit entfernen würde. Es genügt, als ein Zeugnis des gegenwärtigen Standes der Theorie, auf die Arbeiten der Herren Colley¹⁾, Oberbeck²⁾ und Walter³⁾ zu verweisen. Alle bisher abgeleiteten theoretischen Darstellungen stehen indessen mit der Erfahrung zum Teil in offenem Widerspruche. Die Theorie giebt z. B. eine abwechselnde Richtung der einzelnen Funken im secundären Kreise, während der Erfahrung gemäss die in der secundären Funkenstrecke erzeugten Funken stets in demselben Sinne gehen. Ferner ist der Theorie gemäss das Zeitintervall zwei aufeinander folgender elementarer Funken stets dasselbe; durch experimentelle Versuche ist dagegen dargelegt worden, dass diese Zeitintervalle vom Oeffnungsaugenblicke in geometrischer Progression anwachsen⁴⁾ etc.

Ein Umstand, der bei den oben erwähnten theoretischen Ableitungen ganz vernachlässigt worden ist, ist die Abänderung, welche die Potentialdifferenz bei der Funkenentladung plötzlich erfährt. Die Theorie, insofern bei derselben diese Aenderung nicht berücksichtigt wird, kann sich wohl nur auf völlig offene Leiter beziehen und somit nur für den Fall, wo keine Funkenentladung weder im primären noch im secundären Kreise stattfindet, gelten. Bei der Funkenentladung im secundären

1) R. Colley, Wied. Ann. **44.** p. 109. 1891.

2) A. Oberbeck, Wied. Ann. **55.** p. 623. 1895; **62.** p. 109. 1897; **64.** p. 193. 1898; **67.** p. 592. 1899.

3) B. Walter, Wied. Ann. **62.** p. 300. 1897; **66.** p. 623 u. 636. 1890.

4) T. Moll, Bih. till K. Sv. Vet. Akad. Handl. **12.** 1886.

Kreise wird dagegen dieser Kreis mittels der Funkenstrecke intermittierend geschlossen, und die bei einem offenen Leiter geltenden Beziehungen werden dadurch abgeändert. Indem wir somit die mangelhafte Uebereinstimmung der bisherigen Theorie mit den thatsächlichen Ergebnissen bei Inductionsapparaten der Behandlung des secundären Kreises als eines offenen Leiters zuschreiben, so ist damit auch die Anschauung, die als Grundlage des theoretischen Theiles der vorliegenden Arbeit dienen soll, gegeben worden. Ueberdies kann selbstverständlich bei der theoretischen Behandlung dieser Aufgabe keine wesentliche Abweichung von den in früheren Arbeiten angewendeten Grundgleichungen vorkommen, es handelt sich hier nur um durchaus wohlbekannte Gleichungen. Es sei:

L_1 der Coefficient der Selbstinduction des primären Kreises,

L_2 der Coefficient der Selbstinduction des secundären Kreises,

M der Coefficient der gegenseitigen Induction,

W_1 der Widerstand des primären Kreises,

W_2 der Widerstand des secundären Kreises,

C_1 die Capacität des primären Condensators,

C_2 die Capacität des secundären Condensators,

i_1 die Stromstärke des primären Kreises zur Zeit t ,

i_2 die Stromstärke des secundären Kreises zur Zeit t ,

E_1 die Potentialdifferenz des primären Kreises zur Zeit t ,

E_2 die Potentialdifferenz des secundären Kreises zur Zeit t .

Die Zeit t wird vom Oeffnungsaugenblicke d. h. vom Oeffnen des primären Kreises angerechnet. Der Extrastrom beim Schliessen und der davon inducirte secundäre Strom haben bekanntlich beim Inductorium keine Bedeutung.

Zwischen den oben bezeichneten Grössen erhält man folgende Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} L_1 \frac{d i_1}{d t} + M \frac{d i_2}{d t} + W_1 i_1 = E_1, \\ L_2 \frac{d i_2}{d t} + M \frac{d i_1}{d t} + W_2 i_2 = E_2, \\ i_1 = - C_1 \frac{d E_1}{d t}, \\ i_2 = - C_2 \frac{d E_2}{d t}. \end{cases}$$

Die Ableitung dieser Gleichungen findet man in den meisten ausführlichen Arbeiten über die Elektrizität, und es ist daher überflüssig, dieselbe durchzuführen.

Setzt man voraus, dass eine Funkenentladung weder im primären noch im secundären Kreise stattfindet, so kann man zwar eine Gleichung, die nur eine einzige der Variablen i_1 , i_2 , E_1 oder E_2 enthält, beim Eliminiren der drei übrigen erhalten, jedoch die Lösung dieser Differentialgleichung liefert dabei einen Ausdruck, der beim Unterdrücken der Funkenentladung, und nur dabei, den wirklichen Vorgängen entspricht. Eine solche Ableitung, die sich zwar eigentlich auf die Teslaspule bezieht, aber ebensogut beim Inductorium verwendet werden kann, findet man in der oben genannten Arbeit von Hrn. Oberbeck.¹⁾ Wenn man die maximale Spannung im secundären Kreise ermitteln will, so muss man jedenfalls diese Ableitung benutzen. Findet aber eine Funkenentladung im secundären Kreise statt, so wird die Spannung durch die Länge der Funkenstrecke bestimmt, und die oben besprochene Ableitung gilt demnach nur vom Oeffnungsaugenblicke bis zur Entladung des ersten elementaren Funken, ganz unabhängig ob die Länge der Funkenstrecke der berechneten Maximalspannung entspricht, oder kürzer ist. Für die auf den ersten elementaren Funken folgenden Erscheinungen im secundären Kreise kann die oben erwähnte Ableitung keine Rechnung leisten. Wenn z. B. die Pole des Inductionsapparates sich in einem der maximalen Funkenlänge entsprechenden Abstände befinden, so folgt bei der Funkenentladung ein plötzliches Sinken der Potentialdifferenz E_2 und die in die zweite Gleichung (1) vorkommende elektromotorische Kraft des secundären Kreises wird demnach in der Rechnung allzu hoch geschätzt. Wenn es sich um einen einfachen Sinusstrom handelte, und die beim Maximum der Potentialdifferenz eintretende Entladung diese Differenz plötzlich zu Null herabsetzte, so würde die in Rechnung gezogene elektromotorische Kraft doppelt grösser als ihr wirklicher Betrag sein. Wenn die Funkenstrecke kürzer als die maximale Funkenlänge ist, so findet die Entladung statt, ehe die Potentialdifferenz ihr Maximum erreicht hat, und dem-

1) A. Oberbeck, Wied. Ann. 55. p. 623. 1895.

zufolge wird der Fehler selbstverständlich grösser, und um so grösser, je weiter die Funkenstrecke von der maximalen Funkenlänge entfernt wird. Bei einer minimalen Länge der Funkenstrecke des secundären Kreises kann man mithin die elektromotorische Kraft E_2 in der zweiten Gleichung durch Null ersetzen, wenn man bei jedem einzelnen elementaren Funken neue Anfangsbedingungen einzuführen sich nicht bequemen will. Es wird somit E_2 in der zweiten Gleichung durch Null ersetzt, wobei jedoch die vierte Gleichung unverändert besteht, obwohl sie nur zur Berechnung der secundären Potentialdifferenz verwendet wird, aber unter der Voraussetzung, dass die Stromstärken von der Potentialdifferenz des secundären Condensators unabhängig sind. Aus den Gleichungen (1) erhält man somit

$$(2) \quad \begin{cases} L_1 \frac{d i_1}{d t} + M \frac{d i_2}{d t} + W_1 i_1 = E_1, \\ L_2 \frac{d i_2}{d t} + M \frac{d i_1}{d t} + W_2 i_2 = 0, \\ i_1 = -C_1 \frac{d E_1}{d t}, \end{cases}$$

welches System ganz unabhängig von der Gleichung

$$(3) \quad i_2 = -C_2 \frac{d E_2}{d t}$$

gelöst wird.

Es muss besonders hervorgehoben werden, dass diese Gleichungen nur eine Annäherung der Vorgänge bei kleineren Funkenstrecken angeben; ob diese Annäherung bis zu einer maximalen Funkenlänge gilt, kann nur eine experimentelle Prüfung entscheiden.

Beim Eliminiren von i_1 und i_2 aus den Gleichungen (2) erhält man

$$(4) \quad \begin{cases} \Delta \frac{d^3 E_1}{d t^3} + \left(\frac{W_1}{L_1} + \frac{W_2}{L_1} \right) \frac{d^2 E_1}{d t^2} \\ + \frac{L_2 + C_1 W_1 W_2}{L_1 L_2 C_1} \frac{d E_1}{d t} + \frac{W_2}{L_1 L_2 C_1} E_1 = 0, \end{cases}$$

wenn die Differenz $1 - (M^2/L_1 L_2)$ mit Δ bezeichnet wird.

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$(5) \quad E_1 = A_0 e^{-\gamma t} + A_1 e^{-\alpha t} \cos \beta t + A_2 e^{-\alpha t} \sin \beta t,$$

wo $-\gamma$ und $-\alpha \pm \beta i$ die Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$(6) \quad \Delta z^3 + \left(\frac{W_1}{L_1} + \frac{W_2}{L_2} \right) z^2 + \frac{L_2 + C_1 W_1 W_2}{L_1 L_2 C_1} z + \frac{W_2}{L_1 L_2 C_1} = 0$$

bedeuten.

Die Gleichung (6) schreiben wir kurz

$$(6a) \quad z^3 + a z^2 + \omega z + c \omega = 0,$$

wo

$$(6b) \quad a = \frac{\frac{W_1}{L_1} + \frac{W_2}{L_2}}{\Delta}; \quad \omega = \frac{1}{L_1 C_1 \Delta}; \quad c = \frac{W_2}{L_2}.$$

Der Coefficient des z hat eigentlich den Wert

$$\omega \left(1 + \frac{C_1 W_1 W_2}{L_2} \right),$$

die Grösse $C_1 W_1 W_2 / L_2$ ist jedoch stets sehr klein und aus den folgenden Beispielen kann man schliessen, dass sie immer vernachlässigt werden kann. Um eine Vorstellung über die Grösse der Coefficienten zu erlangen, wollen wir zuerst die Constanten eines Du Bois-Reymond'schen Inductoriums angeben¹⁾

$$W_1 = 1 \times 10^9 \text{ cm}^{+1} \text{ sec}^{-1}; \quad L_1 = 6,7 \times 10^5 \text{ cm};$$

$$W_2 = 400 \times 10^9 \text{ cm}^{+1} \text{ sec}^{-1}; \quad L_2 = 9,3 \times 10^8 \text{ cm};$$

$$M = 2,2 \times 10^7 \text{ cm}.$$

Demgemäss ergibt sich

$$\frac{M^2}{L_1 L_2} = 0,776; \quad \Delta = 0,224; \quad a = 8583; \quad c = 430.$$

Die Grösse ω muss jedenfalls sehr gross sein, da 1 Mikrof. in absolutem Maasse $10^{-15} \text{ cm}^{-1} \text{ sec}^{+2}$ entspricht.

Die gegenseitige Induction wird von Hrn. Colley in seiner oben erwähnten Arbeit vernachlässigt, und dieser Ansicht wird auch von Hrn. Walter beigetreten. Wie aus dem Obigen und den folgenden Beispielen hervorgeht, ist diese Annahme nicht stichhaltig. Die von Hrn. Walter in seiner oben erwähnten Arbeit gemessenen Constanten eines Kohl'schen Inductoriums waren die folgenden:

1) Vgl. A. Heydweiller, Hilfsbuch für elektrische Messungen, p. 198. 1892.

$$W_1 = 0,56 \times 10^9 \text{ cm}^{+1} \text{ sec}^{-1}; \quad L_1 = 0,113 \times 10^9 \text{ cm};$$

$$W_2 = 11700 \times 10^9 \text{ cm}^{+1} \text{ sec}^{-1}; \quad L_2 = 620 \times 10^9 \text{ cm};$$

$$C_1 = 0,22 \times 10^{-15} \text{ cm}^{-1} \text{ sec}^{+2}.$$

Der Coefficient der gegenseitigen Induction war dabei zwar nicht gemessen worden; weil derselbe jedoch wahrscheinlich nahezu $\sqrt{L_1 L_2}$ ist, so erhalten wir als Werte der Coefficienten

$$a = \frac{23,83}{A}; \quad \omega = \frac{4 \times 10^7}{A}; \quad c = 18,87,$$

und die dabei vernachlässigte Grösse $C_1 (W_1 W_2 / L_2)$ ist demnach nur $4/10^6$, was neben (1) somit eine nichts bedeutende Grösse ist. In jeder dieser Angaben fehlt eine Constante; eine Angabe aller Constanten eines Ruhmkorff'schen Inductoriums bin ich jedoch im stande zu liefern; diese Constanten, deren Bestimmung Hr. Ångström auf mein Begehren gütigst von Hrn. Holmberg hat ausführen lassen, beziehen sich auf das von Hrn. Moll bei seiner Arbeit benutzte Inductorium, und sind, wie folgt:

$$W_1 = 0,368 \times 10^9; \quad L_1 = 0,01303 \times 10^9; \quad M = 2,135 \times 10^9;$$

$$W_2 = 46574 \times 10^9; \quad L_2 = 885 \times 10^9; \quad C_1 = 2,58 \times 10^{-15}.$$

Dabei ergibt sich

$$\frac{M^2}{L_1 L_2} = 0,395 \quad \text{und} \quad A = 0,605,$$

und folglich

$$a = 133,7; \quad \omega = 4,916 \cdot 10^7; \quad c = 52,6.$$

Es ist jedoch zu bemerken, dass W_1 und W_2 als Ohm'sche Widerstände berechnet worden sind, obwohl bei der Wellenbewegung der Widerstand viel grösser als bei constantem Strome ist. Wegen der geringen Dicke des secundären Drahtes ist bezüglich W_2 der Fehler sehr klein, und der Coefficient c kann daher, wie sich später erweisen wird, als angenähert richtig betrachtet werden. W_1 weicht dagegen von dem wahren Widerstand des primären Kreises beträchtlich ab, und der Coefficient a ist somit in den numerischen Beispielen allzu klein geschätzt worden.

Wir kehren indessen zur Gleichung (6a) zurück. Bei der Substitution

$$z = x - \frac{a}{3}$$

ergibt sich

$$(6c) \quad x^3 + q x + r = 0,$$

wo

$$q = \omega - \frac{a^2}{3}; \quad r = \frac{2a^3}{27} + \left(c - \frac{a}{3}\right)\omega.$$

Wenn mit ϱ_1 und ϱ_2 die reellen Wurzeln

$$\left. \begin{matrix} \varrho_1 \\ \varrho_2 \end{matrix} \right\} = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}}$$

bezeichnet werden, so folgt aus der Cardan'schen Lösung, dass

$$x_1 = \varrho_1 + \varrho_2 \quad \text{und} \quad \left. \begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix} \right\} = -\frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} \pm \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2} i \sqrt{3}$$

die Wurzeln der Gleichung (6c) darstellen. Annäherungsweise ergibt sich

$$\sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}} = \frac{\omega}{3} \sqrt{\frac{\omega}{3}} \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{3\omega}} = \frac{\omega}{3} \sqrt{\frac{\omega}{3}},$$

und demzufolge

$$\left. \begin{matrix} \varrho_1 \\ \varrho_2 \end{matrix} \right\} = \sqrt[3]{\frac{\omega}{6} (a - 3c) \pm \frac{\omega}{3} \sqrt{\frac{\omega}{3}}}$$

oder

$$\left\{ \begin{matrix} \varrho_1 = \sqrt{\frac{\omega}{3}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{a-3c}{\sqrt{\omega}} \right), \\ \varrho_2 = -\sqrt{\frac{\omega}{3}} \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{a-3c}{\sqrt{\omega}} \right). \end{matrix} \right.$$

Man erhält somit

$$\left. \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\} = -\frac{a-3c}{6} \pm i \sqrt{\frac{\omega}{3}}.$$

Aus der Beziehung

$$z = x - \frac{a}{3}$$

ergibt sich somit

$$\left. \begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix} \right\} = -c \pm i \sqrt{\frac{\omega}{3}}.$$

Wenn statt a und c die dem Inductionsapparate zugehörigen Constanten eingesetzt werden, und die Wurzeln z_1 , z_2 und z_3 auf die Bezeichnungen $-\gamma$ und $-\alpha \pm \beta i$ zurückgeführt werden, so erhält man

$$(7) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{\frac{W_1}{L_1} + \frac{M^2}{L_1 L_2} \cdot \frac{W_2}{L_2}}{1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}} = \frac{\frac{W_1}{L_1} + \frac{M^2}{L_1 L_2} \cdot \frac{W_2}{L_2}}{\Delta}, \\ \beta = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1 \Delta}}, \\ \gamma = \frac{W_2}{L_2}. \end{cases}$$

Beim Betrachten der Differentialgleichungen (2) sieht man lediglich ein, dass i_1 und i_2 derselben Differentialgleichung (4) wie E_1 befriedigen müssen, und man erhält somit

$$(8) \quad \begin{cases} E_1 = A_0 e^{-\gamma t} + A_1 e^{-\alpha t} \cos \beta t + A_2 e^{-\alpha t} \sin \beta t, \\ i_1 = X_0 e^{-\gamma t} + X_1 e^{-\alpha t} \cos \beta t + X_2 e^{-\alpha t} \sin \beta t, \\ i_2 = Y_0 e^{-\gamma t} + Y_1 e^{-\alpha t} \cos \beta t + Y_2 e^{-\alpha t} \sin \beta t, \end{cases}$$

wo A_0 , A_1 , A_2 , X_0 , X_1 , X_2 , Y_0 , Y_1 und Y_2 aus den Anfangsbedingungen zu bestimmende Constanten sind. Zur Zeit $t=0$ oder im Oeffnungsaugenblicke hat man

$$E_1 = 0, \quad i_1 = i_0 \quad \text{und} \quad i_2 = 0,$$

wenn i_0 die Stärke des constanten Stromes bedeutet. Aus den Differentialgleichungen (2) werden von den obigen Anfangsbedingungen zur Bestimmung der Integrationsconstanten folgende Werte der Differentialquotienten abgeleitet:

$$(9) \quad \begin{cases} E_1 = 0, & \frac{dE_1}{dt} = -\frac{i_2}{C_1}, & \frac{d^2 E_1}{dt^2} = W_1 \beta^2 i_0, \\ i_1 = i_0, & \frac{di_1}{dt} = -\frac{W_1}{L_1 \Delta} i_0, & \frac{d^2 i_1}{dt^2} = i_0 \left[\frac{W_1}{L_1 \Delta} \cdot \alpha - \beta^2 \right], \\ i_2 = 0, & \frac{di_2}{dt} = \frac{M W_1}{L_1 L_2 \Delta} i_0, & \frac{d^2 i_2}{dt^2} = i_0 \frac{M}{L_2} \cdot \left[-\frac{W_1 \alpha}{L_1 \Delta} + \beta^2 \right]. \end{cases}$$

Beim Differenziren der Gleichungen (8) und Einsetzen der in (9) dargestellten Werte der Differentialquotienten erhält man für die Constanten A_0 , A_1 , A_2 , X_0 etc. folgende Werte:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} A_0 &= -\frac{i_0}{C_1} \cdot \frac{2\alpha - \frac{W_1}{L_1 D}}{\beta^2 + (\alpha - \gamma)^2}, \\ A_1 &= \frac{i_0}{C_1} \cdot \frac{2\alpha - \frac{W_1}{L_1 D}}{\beta^2 + (\alpha - \gamma)^2}, \\ A_2 &= \frac{i_0}{\beta C_1} \cdot \frac{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + (\gamma - \alpha) \frac{W_1}{L_1 D}}{\beta^2 + (\alpha - \gamma)^2}, \\ X_0 &= i_0 \cdot \frac{\alpha^2 - \frac{\alpha W_1}{L_1 D}}{\beta^2 + (\alpha - \gamma)^2}, \\ X_1 &= i_0 \cdot \frac{\beta^2 - 2\alpha\gamma + \gamma^2 + \frac{\alpha W_1}{L_1 D}}{\beta^2 + (\alpha - \gamma)^2}, \\ X_2 &= i_0 \cdot \frac{(\beta^2 + \gamma^2 - \alpha\gamma) \left(\alpha - \frac{W_1}{L_1 D} \right)}{\beta [\beta^2 + (\alpha - \gamma)^2]}, \\ Y_0 &= i_0 \frac{M}{L_2} \cdot \frac{\beta^2 + (\alpha - \gamma) \frac{W_1}{L_1 D}}{\beta^2 + (\alpha - \gamma)^2}, \\ Y_1 &= -i_0 \frac{M}{L_2} \cdot \frac{\beta^2 + (\alpha - \gamma) \frac{W_1}{L_1 D}}{\beta^2 + (\alpha - \gamma)^2}, \\ Y_2 &= i_0 \frac{M}{L_2} \cdot \frac{\beta \left[\frac{W_1}{L_1 D} + \gamma - \alpha \right]}{\beta^2 + (\alpha - \gamma)^2}. \end{aligned} \right.$$

Beim Integrieren der Gleichung (3) ergibt sich

$$C_2 E_2 = - \int_0^t i_2 dt,$$

wenn die Bedingung $E_2 = 0$ zur Zeit $t=0$ berücksichtigt wird, und man erhält somit

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} C_2 E_2 &= B_0 + B_1 - B_0 \varepsilon^{-\gamma t} - B_1 \varepsilon^{-\alpha t} \cos \beta t \\ &\quad + B_2 \varepsilon^{-\alpha t} \sin \beta t, \end{aligned} \right.$$

wo

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} B_0 &= \frac{Y_0}{\gamma}, \\ B_1 &= \frac{\alpha Y_1 + \beta Y_2}{\alpha^2 + \beta^2}, \\ B_2 &= \frac{\beta Y_1 - \alpha Y_2}{\alpha^2 + \beta^2}. \end{aligned} \right.$$

Die Gleichungen (11) und (12) geben somit die secundäre Spannung an, wenn die Funkenstrecke verhältnismässig klein ist.

Es wurde oben gesagt, dass der Widerstand des primären Kreises bei Wellenbewegung mit dem Ohm'schen Widerstande nicht identisch ist, und dass demzufolge α in den numerischen Beispielen zu klein berechnet wurde. Eine andere Fehlerquelle liegt in der mangelhaften Uebereinstimmung der Differentialgleichungen und ihrer Lösungen mit dem Anfangszustande des primären Stromes. Man kann sich der Einfachheit wegen zuerst die primäre Spule ohne die secundäre denken; beim Unterbrechen des Kreises wird bekanntlich der Condensator oscillatorisch geladen und die Gleichungen, die diese oscillatorische Ladung darstellen, sind dieselben, die für die Entladung des Condensators gelten. Der einzige Unterschied besteht darin, dass die Bewegung bei der Ladung mit einer Potentialdifferenz Null beginnt, während bei der Entladung die Potentialdifferenz anfangs ein Maximum ist, oder dass im vorliegenden Falle die Bewegung um ein Viertel der Wellenlänge verschoben ist. Bei der oscillirenden Ladung und Entladung des Condensators fliesst indessen der Strom an der Oberfläche des Leiters und die Anfangsbedingungen müssen mit den Bewegungsgleichungen übereinstimmen, d. h. der Strom muss beim Unterbrechen des Kreises an der Oberfläche des Leiters fliessen, wenn der Verlauf des Stromes durch die abgeleiteten Gleichungen genau dargestellt werden soll. Wenn der Leiter aus sehr feinem Drahte besteht, so ist der Unterschied zwischen der Anfangsbedingung und dem Gesetze der oscillatorischen Entladung sehr klein, weil der innere Teil des Querschnittes dem der Oberfläche sehr nahe liegt, und für diesen Fall sind auch die Vorgänge im Einklange mit der mathematischen Ableitung. Bei grösserer Drahtdicke kann dagegen nur ein Teil des Stromes, der an der Oberfläche fliesst, den Bewegungsgleichungen genau folgen, während der innere Strom einen abweichenden Verlauf haben muss. Eine derartige Erscheinung muss auch bei der Gegenwart der secundären Spule stattfinden, und es kann demgemäss nur ein Teil des constanten Stromes beim Unterbrechen den Differentialgleichungen genau

folgen.¹⁾ Dieser Umstand ist wahrscheinlich der Grund einiger Erscheinungen, die mit der Theorie unvereinbar erscheinen.

Die Primärspannung.

Aus dem oben Gesagten geht hervor, dass ein Versuch, die primäre Spannung zu berechnen, wahrscheinlich sehr fehlerhaft ausfallen muss; wegen der Bedeutung der primären Spannung bezüglich des Unterdrückens des Oeffnungsfunkens ist jedoch eine solche Berechnung notwendig. Setzt man voraus, dass in dem in Gleichung (5) dargestellten Ausdrucke der primären Spannung das Glied $A_0 e^{-\gamma t}$ die Lage der maximalen Spannung wenig beeinflusst, so erhält man beim Differenzieren die Bedingungsgleichungen

$$(13) \quad \frac{\cos \beta t}{\beta A_1 + \alpha A_2} = \frac{\sin \beta t}{\beta A_2 - \alpha A_1} = \pm \frac{A_1 + A_2}{(A_1^2 + A_2^2) \beta},$$

die zur Bestimmung der Zeit t , in welcher die Primärspannung sein Maximum erreicht, dienen. Beim Einsetzen dieses Wertes von t in die Gleichung (5) ergibt sich

$$(14) \quad E_{1\max} = A_0 e^{-\gamma t} \pm (A_1 + A_2) e^{-\alpha t},$$

wo der in (13) erhaltene Wert von t einzusetzen ist.

Wir wollen die Primärspannung bei dem oben besprochenen Kohl'schen Inductorium zu bestimmen versuchen. Beim Einsetzen der Constanten dieses Inductoriums in die Gleichungen (7) ergibt sich

$$\alpha = \frac{23,83}{A}, \quad \beta = \frac{6324}{\sqrt{A}}, \quad \gamma = 18,87,$$

wenn $M^2/L_1 L_2$ annäherungsweise mit 1 ersetzt wird.

Der Quotient α/β beträgt somit

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{23,83}{6324 \sqrt{A}}.$$

Es wurde von Hrn. Walter bei dem besprochenen Kohl'schen Inductorium beobachtet, dass die Schwingungs-

1) Streng genommen folgt die Entladung eines Condensators niemals dem dafür dargestellten elementaren Gesetze, was z. B. aus einer Abhandlung von J. Stefan, Wied. Ann. 41. p. 421. 1890 hervorgeht.

amplitude während einer halben Oscillationsdauer zu $\frac{1}{3}$ vermindert wurde, und demgemäss ergibt sich

$$\frac{-\pi\alpha}{\beta} = \frac{1}{3} \quad \text{oder} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\log \text{nat } 3}{\pi} = 0,349.$$

Bei Vergleichung der zwei Werte von α/β erhält man

$$\Delta = 0,000117.$$

α , β und γ werden dadurch bestimmt:

$$\alpha = 204\,000; \quad \beta = 585\,600; \quad \gamma = 18,87.$$

Berechnet man vermöge dieser Angaben aus den Gleichungen (8) und (9) die Primärspannung, so ergibt sich

$$E_1 = -i_0 \cdot 10^6 [4,20 \cdot e^{-\gamma t} - 4,20 \cdot e^{-\alpha t} \cos \beta t + 6,03 \cdot e^{-\alpha t} \sin \beta t],$$

wo E_1 in absolutem Maasse und i_0 in Ampère angegeben worden sind. Davon erhält man eine maximale Spannung von etwa $27,40 \times 10^8 = 27,4$ Volt bei einer Stromstärke von etwa 6 Ampère.

Die von Hrn. Oberbeck beobachteten Primärspannungen betrugen etwa 6—14 Volt. Der oben berechnete Wert von etwa 27 Volt kann ja bei den spärlichen Zahlenangaben, auf denen die Berechnung beruht, nur als sehr unzuverlässig betrachtet werden. Weil er jedoch nicht von den beobachteten Primärspannungen besonders abweicht, so ist er hier angeführt worden. W_1 ist in der Berechnung, wie oben bemerkt wurde, zu klein geschätzt und demzufolge der Wert $\Delta = 0,000117$ kleiner als der wirkliche Betrag dieser Differenz.

Ein Umstand darf jedoch nicht übersehen werden, nämlich, dass die von Hrn. Walter beobachtete Dämpfung sich auf die Grundschiwingung des primären Kreises bezieht, und das Auftreten der Grundschiwingung, was jedenfalls nicht mit der Theorie im Einklang steht, muss man wahrscheinlich der mangelhaften Uebereinstimmung der Anfangsbedingungen mit der Stromverteilung zuschreiben; der innere Strom oder der Strom, der beim Unterbrechen im Innern des Leiters fliesst, kann wohl die zur Erzeugung der Grundschiwingung nötige Elektrizitätsmenge liefern.

Aus der Gleichung (14) erhält man

$$(15) \quad E_{1\max} = -\frac{i_0}{\beta C_1} \cdot f \cdot \frac{\beta^2 - \alpha^2 - 2\alpha\beta + \gamma^2 + \frac{W_1}{L_1 A} (\alpha + \beta - \gamma)}{\beta^2 + (\alpha - \gamma)^2},$$

wenn das $\varepsilon^{-\gamma t}$ enthaltende Glied vernachlässigt wird und f den Dämpfungsfactor bezeichnet. Wenn β verhältnismässig gross ist, so ändert sich der letzte Bruch wie der Dämpfungsfactor sehr wenig bei mässigen Variationen der Capacität C_1 , und man kann annäherungsweise

$$(15a) \quad E_{1\max} = -i_0 f \cdot \sqrt{\frac{L_1}{C_1} \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right)}$$

schreiben. Es ist aus der obigen Gleichung lediglich ersichtlich, dass bei niedriger Condensatorcapacität die primäre Spannung sehr hoch steigen muss, und bei kleiner Capacität muss daher eine Funkenentladung an der Oeffnungsstelle stattfinden; wenn die Capacität allmählich erhöht wird, so gelangt man endlich zu einem Optimum, wo die Funkenentladung beseitigt wird. Wird die primäre Capacität noch mehr vergrössert, so wird selbstverständlich die Funkenentladung immer beseitigt, die maximale Primärspannung nimmt jedoch ab und zwar so, dass sie dem reciproken Werte der Quadratwurzel aus der Capacität proportional ist. *Das Optimum ist somit die kleinste Capacität, die den primären Oeffnungsfunken zu beseitigen vermag.*

Eine experimentelle Bestätigung des oben Gesagten ist von den Herren Walter¹⁾ und Mizuno²⁾ geliefert worden, wenn man nämlich die Maximallänge des secundären Funkens als ein Maass der primären Spannung betrachten darf. Eine Berechnung der von diesen Beobachtern bei verschiedenen Capacitäten observirten secundären Funkenlängen liefert Werte, die mit den beobachteten gut übereinstimmen.³⁾

Aus der Beziehung (15a) geht auch hervor, dass je grösser der Coefficient der gegenseitigen Induction oder je kleiner die Differenz $1 - (M^2/L_1 L_2)$, um so kleiner ist auch die zur Beseitigung des Oeffnungsfunkens nötige Capacität.

1) B. Walter, Wied. Ann. 62. p. 302. 1897.

2) T. Mizuno, Phil. Mag. 45. p. 447. 1898.

3) Vgl. K. R. Johnson, Phil. Mag. 49. p. 216. 1900; Ann. d. Phys. 2. p. 184. 1900.

Leider ist die Bedeutung der gegenseitigen Induction im allgemeinen übersehen worden, und die meisten Inductorien sind daher in dieser Hinsicht sehr unvollkommene Apparate, die besonders grosser Condensatoren bedürfen. Dabei wird der abgekürzte Ausdruck der maximalen Spannung in (15a) nicht anwendbar, denn die Abschwächung der Spannung wird dabei zum Teil mit Hülfe des Zählers in (15) bewirkt, da bei grosser Capacität β nicht besonders gross neben α ist. Leider habe ich kein Inductorium, das so geringer Capacität wie das Kohl'sche bedarf, gefunden. In der That hängt jedoch im allgemeinen die Güte eines Inductionsapparates meistens von dem kleinen Betrage der vorteilhaftesten Capacität ab.

Die Funkenentladungen in der secundären Funkenstrecke.

Bei den elektrostatischen Entladungen wurde im allgemeinen das Entladungspotential als nur von dem Abstände und der Form der Elektroden und der Natur des Gases, in welchem die Entladung stattfand, abhängig betrachtet, bis die Abhängigkeit des Funkenpotentials von der zeitlichen Aenderung des Entladungsfeldes von Hrn. Jaumann nachgewiesen war.¹⁾ Nach Jaumann hängt somit das Funkenpotential von der Grösse $E(dE/dt)$ ab, wenn E die Potentialdifferenz der Elektroden bedeutet. Diese Entladungsbedingung ist eine nahezu unmittelbare Schlussfolgerung aus der Ansicht über die Funkenentladung, die schon längst von Faraday ausgesprochen wurde. Nach Faraday hängt die Funkenentladung von der Energie des Stromes ab, und in allen Fällen, wo eine Wellenbewegung stattfindet, wird die Energie des Stromes Ei durch $CE(dE/dt)$, ausgedrückt, weil die Stromstärke $i = C(dE/dt)$ ist, wenn C eine Capacität bedeutet. Wenn die Aenderung des elektrischen Feldes von einer periodisch wechselnden Stromstärke bewirkt wird, und die Schwingungen sehr schnell verlaufen, so ist die Frequenz ein Maass der Grösse $C(dE/dt)$ und die Entladung muss demgemäss von der Grösse $\beta/2\pi \cdot E$ abhängen, was mit der älteren Ansicht übereinstimmt, wenn $\beta/2\pi$ constant ist.

1) G. Jaumann, Wied. Ann. 55. p. 656. 1895; Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 97. p. 765. 1888; 104. p. 12. 1895.

Es wird daher im Folgenden angenommen, dass, wenn die Funkenentladung in Luft bei einer bestimmten Elektrodenform stattfindet, das Funkenpotential oder die Potentialdifferenz der Elektroden nur von der Länge der Funkenstrecke abhängt. In den Gleichungen (11) und (12) haben wir bereits einen Ausdruck der secundären Potentialdifferenz gefunden, der zwar nur vom Oeffnungsaugenblicke bis zum Ueberspringen des ersten elementaren Funkens gilt. Zur Zeit $t=0$ ist $E_2=0$ und wächst allmählich bis zu einem Werte E_0 , bei welchem der erste Funke überspringt. E_0 ist unserer Annahme gemäss nur von der Länge der Funkenstrecke abhängig, und die Zeit t vom Oeffnen des primären Kreises, zu welcher der erste Funke entladen wird, muss demgemäss die Gleichung

$$C_2 E_0 = B_0 + B_1 - B_0 \varepsilon^{-\gamma t_1} - B_1 \varepsilon^{-\alpha t_1} \cos \beta t_1 + B_2 \varepsilon^{-\alpha t_1} \sin \beta t_1$$

befriedigen. Wenn die Potentialdifferenz bei jedem einzelnen elementaren Funken zum Werte V_0 sinkt, so muss dem Pole eine Elektrizitätsmenge $C_2(E_0 - V_0)$, um ein Anwachsen der Potentialdifferenz zu E_0 wieder hervorzubringen, zugeführt werden. Es sei t_2 die Zeit vom Oeffnungsaugenblicke zum zweiten Anwachsen des Potentials bis E_0 , so findet der zweite elementare Funke zur Zeit t_2 statt, und t_2 muss demgemäss der Gleichung

$$C_2 E_0 + C_2 (E_0 - V_0) = B_0 + B_1 - B_0 \varepsilon^{-\gamma t_2} - B_1 \varepsilon^{-\alpha t_2} \cos \beta t_2 + B_2 \varepsilon^{-\alpha t_2} \sin \beta t_2$$

genügen. Bei Verwendung derselben Betrachtungsweise findet man zuletzt, dass der n^{te} elementare Funke zu einer Zeit t_n , die der Gleichung

$$(16) \quad \begin{cases} C_2 E_0 + (n-1) C_2 (E_0 - V_0) = B_0 + B_1 \\ - B_0 \varepsilon^{-\gamma t_n} - B_1 \varepsilon^{-\alpha t_n} \cos \beta t_n + B_2 \varepsilon^{-\alpha t_n} \sin \beta t_n \end{cases}$$

genügt, stattfindet. Zur Bestimmung der Zeit t_{n+1} , zu welcher der $(n+1)^{\text{ste}}$ Funke überspringt, erhält man ebenfalls

$$(17) \quad \begin{cases} C_2 E_0 + n C_2 (E_0 - V_0) = B_0 + B_1 - B_0 \varepsilon^{-\gamma t_{n+1}} \\ - B_1 \varepsilon^{-\alpha t_{n+1}} \cos \beta t_{n+1} + B_2 \varepsilon^{-\alpha t_{n+1}} \sin \beta t_{n+1} \end{cases}$$

Wenn die Substitution $\tau_n = t_{n+1} - t_n$ eingeführt wird, wo τ_n somit das Zeitintervall zwischen dem n^{ten} und $(n+1)^{\text{ten}}$ Funken bedeutet, und wenn die Gleichung (16) von (17) subtrahirt wird, so ergibt sich

$$(18) \left\{ \begin{aligned} C_2(E_0 - V_0) &= B_0 \cdot \varepsilon^{-\gamma t_n} (1 - \varepsilon^{-\gamma \tau_n}) \\ &+ B_1 \varepsilon^{-\alpha t_n} [\cos \beta t_n - \varepsilon^{-\alpha \tau_n} \cos \beta (t_n + \tau_n)] \\ &+ B_2 \varepsilon^{-\alpha t_n} [\varepsilon^{-\alpha \tau_n} \sin \beta (t_n + \tau_n) - \sin \beta t_n]. \end{aligned} \right.$$

Die Zeitdauer τ_n , die zwischen zwei aufeinander folgenden Funken verfliesst, ist selbstverständlich sehr klein und man kann somit annäherungsweise statt $\varepsilon^{-\gamma \tau_n}$ die Entwicklung $\gamma - \gamma \tau_n$ schreiben und ebenfalls $\varepsilon^{-\alpha \tau_n}$ durch $1 - \alpha \tau_n$ ersetzen. Man erhält demnach aus (18)

$$C_2(E_0 - V_0) = B_0 \gamma \tau_n \varepsilon^{-\gamma t_n} + B_1 \varepsilon^{-\alpha t_n} [\cos \beta t_n - \cos \beta (t_n + \tau_n) + \alpha \tau_n \cos \beta (t_n + \tau_n)] + B_2 \varepsilon^{-\alpha t_n} [\sin \beta (t_n + \tau_n) - \sin \beta t_n - \alpha \tau_n \sin \beta (t_n + \tau_n)],$$

oder

$$(19) \left\{ \begin{aligned} B_0 \gamma \cdot \tau_n &= C_2(E_0 - V_0) \varepsilon^{+\gamma t_n} - B_1 \varepsilon^{(\gamma - \alpha) t_n} [\cos \beta t_n - \cos \beta (t_n + \tau_n) \\ &+ \alpha \tau_n \cos \beta (t_n + \tau_n)] - B_2 \varepsilon^{(\gamma - \alpha) t_n} [\sin \beta (t_n + \tau_n) \\ &- \alpha \tau_n \sin \beta (t_n + \tau_n) - \sin \beta t_n], \end{aligned} \right.$$

oder kurz

$$(19a) \quad \tau_n = \frac{C_2(E_0 - V_0) \varepsilon^{+\gamma t_n} - f(t_n, \tau_n)}{B_0 \gamma},$$

wenn die periodischen Glieder in der Gleichung (19) mit $f(t_n, \tau_n)$ bezeichnet werden. Wenn das Glied $f(t_n, \tau_n)$ eine zu vernachlässigende Grösse ist, so liefert die Gleichung (19a) somit eine theoretische Ableitung des von Hrn. Moll aus seinen Beobachtungen gefundenen Gesetzes, dass die Zeitabstände der einzelnen elementaren Funken in geometrischer Progression anwachsen.¹⁾ Die periodischen Abweichungen von dem Gesetze sind auch von Hrn. Moll beobachtet worden, und da diese Arbeit überdies viele Thatsachen ergibt, die zur Bestätigung

1) T. Moll, Bih. till K. Sv. Vet. Akad. Handl. 12. 1886.

der obigen Theorie dienen, so will ich davon einen kurzen Auszug liefern.

Seine Versuche wurden mit einer der Feddersen'schen ähnlichen Versuchsanordnung ausgeführt, die sich hauptsächlich durch Vertauschung des rotirenden Spiegels mit einer rotirenden Scheibe, die mit lichtempfindlichem Papier bekleidet worden war, von der von Feddersen benutzten Anordnung unterschied. Bei zweckmässiger Geschwindigkeit der rotirenden Scheibe wurden somit die einzelnen Funken photographisch aufgenommen, und die Zwischenzeiten der Funken waren mit den entsprechenden Kreisbogen zwischen den Lichtabdrücken auf dem Papiere proportional. Bei jedem einzelnen Unterbrechen des primären Stromes wurde eine Reihe von den dabei erzeugten elementaren Funken auf einem Papiere aufgenommen. Ich entnehme aus der Arbeit des Hrn. Moll folgenden Bericht über die Versuchsergebnisse:

„Die photographischen Abdrücke zeigen alle ein *Anwachsen der Zeitabstände der einzelnen Funken gegen das Ende der Entladung*. Dies gilt auch bezüglich der einzelnen Funken, die einer stillen Entladung nachfolgen. *Insbesondere bei den letzten Abständen ist das Anwachsen sehr beträchtlich*, und der letzte Abstand ist nicht selten mehr als doppelt grösser als der nächst vorausgehende.“

„Bei niedriger Zahl der Funken (< 10) wachsen die Abstände im allgemeinen stetig vom Anfang bis zum Ende der Entladung. Bei grösserer Funkenzahl ist es nicht so; die einzelnen Zeitabstände schwanken dann um einen wachsenden Mittelwert hin und her und erst nach dem Verlauf einer Anzahl elementarer Funken nehmen die Zeitabstände stetig zu. Ein hauptsächlichlicher Grund dieses Betragens liegt darin, dass die Funken nicht demselben Weg von einer Elektrode zur anderen folgen. Die wahrscheinlich sehr beträchtlichen Abweichungen, die davon abhängen, verbergen das Gesetz, nach welchem die Zeitabstände folgen, welches jedoch, weil diese Abweichungen ganz zufällig sind, aus einer grösseren Zahl von Entladungen hervorgehen muss, wodurch man das bei allen Gemeinschaftliche erhalten kann. Eine solche Vergleichung hat jedoch keinen Aufschluss geliefert. Am meisten

wachsen die ersten Zeitintervalle bis sie ein Maximum beim zweiten oder (obwohl seltener) beim dritten (5 Fälle von 27, wo die ersten Abstände abnehmen, machen eine Ausnahme) erreichen, und nehmen dann bis zu einem Minimum ab. Nur in den Reihen, die mehr als 20 einzelne Funken enthalten, finden mehrere Maxima und Minima statt. Es ist jedoch nicht möglich, zu entscheiden, ob dieses Betragen von gesetzmässigen Schwankungen der zufließenden Elektrizität abhängt.“

„Die Beziehung zwischen dem Zeitabstande zwei aufeinander folgender elementarer Funken (τ) und der Zeit vom ersten Funken (t) habe ich mittels der Gleichung

$$\tau = k \cdot \varepsilon^{\alpha t}$$

darzustellen versucht. Zufolge der Proportionalität der Zeitintervalle mit den Bogen auf den photographischen Aufnahmen kann man bei Berechnung der Beobachtungen statt der obigen Gleichung die Beziehung

$$y = c \varepsilon^{\beta x}$$

benutzen, wo y den Bogen, welcher der Zeit τ entspricht und x den der Zeit t zugehörigen Bogen bedeuten. Die Constanten c und β wurden nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet, und die dabei berechneten Werte von y stimmten mit den beobachteten ziemlich gut überein. Die letzten Abstände nahmen jedoch viel schneller als die Ordinaten y der Curve zu und demgemäss wurden bei der Berechnung die drei oder vier letzten Bogen vernachlässigt.“

„Die Tab. 10 enthält die aus den Reihen 41a und 41b beobachteten und berechneten Werte der Bogen y und ihre Differenzen.“

„Die Constanten c und β einmal berechnet, erhält man lediglich k und α . Wenn w die Zeitdauer einer Umdrehung der Scheibe bezeichnet, so ist

$$k = \frac{w c}{360} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{\beta \cdot 360}{w}.$$

„Aus dem Versuche 41a ergab sich $k = 0,000324$ und $\alpha = 64,6$ und bei 41b $k = 0,000378$ und $\alpha = 50,1$.“

Tabelle 10.

Photographische Aufnahme 41 a					Photographische Aufnahme 41 b				
y beob.	Mittel- wert y	x	y ber.	Diff.	y beob.	Mittel- wert y	x	y ber.	Diff.
6,50	6,68	6,50	6,77	+ 0,09	5,40	5,40	5,40	5,28	-0,12
6,85	7,65	13,35	7,13	- 0,52	5,40	5,88	10,80	5,53	-0,35
8,45	7,45	21,80	7,59	+ 0,14	6,35	5,95	17,15	5,85	-0,10
6,45	7,75	28,25	7,97	+ 0,22	5,55	5,48	22,70	6,13	+0,65
9,05	8,68	37,30	8,42	- 0,26	5,40	6,08	28,10	6,42	+0,34
8,30	8,88	45,60	9,07	+ 0,19	6,75	6,70	34,85	6,81	+0,11
9,45	9,58	55,05	9,73	+ 0,15	6,65	7,30	41,50	7,21	-0,09
9,70	9,55	64,75	10,46	+ 0,91	7,95	8,58	49,45	7,73	-0,85
9,40	11,43	74,15	11,22	- 0,21	9,20	8,20	58,65	8,37	+0,17
13,45	13,40	87,60	12,41	- 0,99	7,20	8,78	65,85	8,90	+0,12
13,35	13,58	100,95	13,71	+ 0,13	10,35	12,53	76,20	9,74	-2,79
13,80	14,08	114,75	15,20	+ 1,12	14,70	13,00	90,90	11,05	-1,95
14,35	15,23	129,10	16,91	+ 1,68	11,30	17,20	102,20	12,19	-5,01
16,10	18,43	145,20	19,07	+ 0,65	23,10				
20,75	32,48	165,95	21,06	-11,42					
44,20									

„Weil es zu erwarten ist, dass die Eigentümlichkeiten der Entladungsvorgänge besonders durch k und α ausgezeichnet werden — k bedeutet ja den Anfangswert der Zeitabstände, und α misst das Ansteigen der Curve —, so habe ich diese Constanten bei einer grösseren Anzahl von Reihen berechnet. Um Zeit und Mühe zu ersparen, wurde bei der Berechnung von c und β nur ein Teil der zugehörigen Werte von x und y , jedoch immer wenigstens vier, die unter den wahrscheinlichsten ausgewählt wurden, benutzt. In der obigen Tabelle sind jedoch die Werte von α nicht aufgenommen worden, weil sie, selbst bei Versuchen, die unter denselben Versuchsbedingungen ausgeführt worden sind, allzu sehr variieren. Auch k zeigt ziemlich grosse Variationen, jedoch kleiner als α .“

Wie aus der Tab. 10 des Hrn. Moll hervorgeht, ist es ihm bei Verwendung der Mittelwerte zwei aufeinander folgender

Zeitabstände ganz gut gelungen, die Berechnung der Curve $y = c \cdot e^{\beta x}$ unabhängig von den periodischen Schwankungen durchzuführen. Seine Constante α ist diejenige, die in unseren Ableitungen (19) mit γ bezeichnet worden ist, und aus den von Hrn. Holmberg gemessenen Constanten des Inductoriums ergibt sich

$$\gamma = \frac{W_2}{L_2} = \frac{46594}{885} = 52,7.$$

Die aus den oben angeführten Reihen 41a und 41b berechneten Werte 50,1 und 64,6 scheinen einem solchen Wert wie 52,7 nicht zu widersprechen, wenn sie auch auf Fehlerquellen bei den Beobachtungen deuten. Diese zwei Reihen sind ja unter denselben oder scheinbar denselben Versuchsbedingungen erhalten worden, sie sind jedoch ganz verschieden. Daraus ergibt sich, dass eine oder mehrere Fehlerquellen, die dem Beobachter unbekannt waren, die Beobachtungen beeinflussen haben. So war z. B. der primäre Condensator, dessen Capacität zwar 2,58 Mikrofarad betrug, jedoch nicht hinlänglich gross, um den Oeffnungsfunken sicher beseitigen zu können. Ferner ist es nicht gleichgültig, ob die Funkenstrecke vor dem Versuche in Ruhe gelassen worden, oder ob sie bei einer vorigen Ladung excitirt worden ist. Am besten lässt man den Apparat vor dem Versuche eine Zeit lang unter der beim Versuche zu benutzenden Versuchsanordnung spielen, um somit ein den Entladungen entsprechendes Entladungsfeld im voraus zu erzeugen.

Obwohl diese Vorsichtsmaassregeln, die zur Zeit dieser Arbeit unbekannt waren, nicht beachtet worden sind, so stimmen die oben beschriebenen Erscheinungen ganz gut mit den Gleichungen (19) überein. Bei kleinerer Funkenzahl, d. h. bei verhältnismässig grossem Abstände der Elektroden und demzufolge grossem Funkenpotential, ist der Factor $e^{(\gamma-\alpha)t_n}$ klein gegenüber $e^{\gamma t_n}$, denn das Verhältniss

$$e^{(\gamma-\alpha)t_n} : e^{\gamma t_n} = e^{-\alpha t_n}$$

wächst mit der Zeit t_n , und die periodischen Schwankungen werden dabei nicht bemerkbar, und aus demselben Grunde können die periodischen Schwankungen bei grösserer Funkenzahl nur bei den ersten Funken beobachtet werden. Nach

den Gleichungen (19) hängen die periodischen Schwankungen der Zeitabstände zusammen mit der Schwingungsdauer

$$T = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi \sqrt{L_1 C_1 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right)},$$

und beim Einsetzen der auf p. 443 angegebenen Constanten erhält man $T = 0,000898$.

Wenn die sieben ersten Zeitabstände aus den beobachteten Bogen y in der Reihe 41a, Tab. 10, berechnet werden, so ergibt sich

$$\begin{array}{lcl} r_1 = 0,000325 \\ r_2 = 0,000343 \\ r_3 = 0,000423 \\ r_4 = 0,000323 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{array}} \right\} r_3 + r_4 = 0,000746$$

$$\begin{array}{lcl} r_5 = 0,000453 \\ r_6 = 0,000415 \\ r_7 = 0,000473 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} r_5 \\ r_6 \\ r_7 \end{array}} \right\} r_5 + r_6 = 0,000868$$

und der Zeitabstand zwischen zwei Maxima ist somit in dieser Reihe ein wenig kleiner als die aus den Constanten des Inductoriums berechnete Schwingungsdauer 0,000898. Bei kleinerem Abstände der Elektroden folgen die Funken schneller aufeinander, und es ist leicht einzusehen, dass man z. B. drei Zeitabstände zwischen zwei Maxima erhalten kann, wenn der Abstand zwei aufeinander folgender Maxima sich der Oscillationsdauer nähert.

Leider sind die Werte von α in allen übrigen Tabellen in der oben erwähnten Arbeit ausgelassen worden, und dasselbe gilt auch in den meisten Fällen von k , wogegen der Mittelwert aller Zeitabstände aufgenommen worden ist. Dieser Mittelwert ist jedoch sehr wenig brauchbar, da derselbe zum Beispiel durch das Ausbleiben des letzten Funkens sehr viel vermindert wird, und deswegen zufällig variiert.

Folgende Gesetze werden von Hrn. Moll für diesen Mittelwert aufgestellt:

1. *Der Mittelwert der Zeitabstände wächst mit wachsendem Elektrodenabstande,*
2. *nimmt mit wachsender Stromstärke ab, und*
3. *wächst mit steigender Capacität des secundären Kreises.*

Wenn wir in der Gleichung (19a) das periodische Glied vernachlässigen, und die Werte von B_0 und γ in (7), (10) und (12) einsetzen, so ergibt sich annäherungsweise

$$(19b) \quad \tau_n = \frac{L_2 C_2 (E_0 - V_0)}{M i_0} \cdot \frac{\beta^2 + (\alpha - \gamma)^2}{\beta^2 + (\alpha - \gamma)} \cdot \frac{W_1}{L_1 A} \cdot \varepsilon \gamma t_n,$$

wo der α , β und γ enthaltende Bruch nahezu 1 ist. Es ergibt sich somit, dass jedes einzelne Zeitintervall τ_n mit der zur Entladung erforderlichen Potentialdifferenz, d. h. mit der Länge der Funkenstrecke, wächst, der secundären Capacität gerade proportional und der Stromstärke umgekehrt proportional ist, und dasselbe muss demnach von dem Mittelwerte gelten.

Die Moll'sche Constante k ist somit

$$(20) \quad k = \frac{L_2 C_2 \cdot (E - V_0)}{M i_0},$$

und wenn nur die Stromstärke i_0 des primären Stromes geändert wird, so soll demgemäss $k i_0$ constant sein. Moll giebt in seiner Tab. 6 folgende Werte von k und i_0 an, welche die Constanz des Productes $k i_0$ zu bestätigen scheinen, und welche hier angeführt werden sollen:

i_0	k	$k \cdot i_0 \cdot 10^{-4}$	Zahl der Beobachtungen
5,37	0,000320	17	3
4,60	0,000402	18	3
4,16	0,000423	18	3
3,91	0,000519	20	1

Die Tab. 1 in der Arbeit des Hrn. Moll enthält ebenfalls einige Werte von k und ihre Beziehung zu dem Funkenpotential $E_0 - V_0$. Wenn wir die Beziehung des Funkenpotentials zur Funkenlänge λ durch die Gleichung

$$E_0 - V_0 = a + b \lambda$$

darstellen, was mit der Berechnung des Hrn. Chrystal¹⁾ aus den Versuchen des Hrn. Baille übereinstimmt, so ergibt sich aus der Gleichung (20)

$$\frac{dk}{d\lambda} = \frac{L_2 C_2}{M i_0} \cdot b,$$

1) Vgl. G. Wiedemann, Die Lehre von der Elektrizität (IV) 2. p. 657. 1885.

wenn $E_0 - V_0$ mit $a + b\lambda$ ersetzt wird. Zu den aus der Tab. 1 des Hrn. Moll angeführten Werten fügen wir die berechneten Werte von $dk/d\lambda$ zu, und es stimmen ja diese Werte mit der Constanz des Differentialquotienten $dk/d\lambda$ ganz gut überein:

λ in Millimetern	k	$\frac{dk}{d\lambda}$	Zahl der Beobachtungen
0,50	0,000286		1
		0,000260	
0,75	0,000351		2
		0,000288	
1,00	0,000423		3
		0,000280	
1,50	0,000563		3
		0,000210	
2,00	0,000668		2
		0,000244	
2,50	0,000790		1

Eine weitere Bestätigung der Theorie kann man aus dieser Arbeit nicht erhalten; die dabei benutzte Methode scheint indessen viel zu versprechen und ich habe daher eine Wiederholung dieser Versuche mit einigen Abänderungen vorgenommen. Leider habe ich kein Inductorium gefunden, bei welchem die Beseitigung des Oeffnungsfunkens erreicht werden konnte, und wurde ich daher genötigt, mir ein Kohl'sches Inductorium zu verschaffen.

(Eingegangen 4. September 1900.)

5. *Constanz oder Inconstanz des Funkenpotentials;* *von K. R. Johnson.*

In einer früher veröffentlichten Arbeit¹⁾ sind von Hrn. Jaumann einige Thatsachen, die vorzüglich die Inconstanz des Funkenpotentials zu beweisen scheinen, dargelegt worden. Dadurch wurde die Ansicht, dass die zur Entladung nötige Potentialdifferenz nur von der Form, dem Abstände und Materiale der Elektroden wie von der Natur des Dielectricums bestimmt werden sollte, widerlegt, indem die zeitliche Aenderung des Entladungsfeldes, nach Hrn. Jaumann, eine wesentliche Entladungsbedingung sein sollte. Die erwähnte Arbeit hat jedoch nur Widerspruch gefunden, und zwar ist man bei den polemischen Arbeiten, die seitdem über diesen Gegenstand veröffentlicht worden sind, von den einfachen Entladungsvorgängen, die bei den üblichen Versuchsanordnungen stattfinden, zu verwickelten Anordnungen, die einen entscheidenden Ausspruch nicht liefern können, geführt worden. Dabei sind dieselben Erscheinungen einerseits für und andererseits wider die von Hrn. Jaumann behauptete Meinung hervorgehoben worden, und dieser Umstand darf wohl hinsichtlich dieser Vorgänge eher als ein Zeugnis der Unsicherheit, als ein Beweis für irgend eine der oben erwähnten Ansichten betrachtet werden. Vorliegende Arbeit beabsichtigt nur einige Einwände, die gegen die oben erwähnte Arbeit hervorgehoben worden sind, zu widerlegen, und es soll daher nur die Entladung, wie sie bei der üblichen Versuchsanordnung vorkommt, in Betracht gezogen werden.

**Das Vorhandensein sehr schneller Oscillationen bei der Ladung
mittels einer statischen Maschine.**

Es wird von den Vertretern der Constanz des Funkenpotentials hervorgehoben, dass die Anwesenheit gesetzmässiger

1) G. Jaumann, Wied. Ann. 55. p. 656. 1895.

Oscillationen bei der Ladung nicht bewiesen werden kann.¹⁾ Ihr Vorhandensein ist jedoch schon längst nachgewiesen worden, wie aus folgendem Versuche, welcher von Faraday²⁾ ausführlich beschrieben worden ist, hervorgeht.

„ . . . Wollaston benutzte als Elektroden mit Glas gut ausgekleidete Drähte, von denen nur die Spitzen der Drähte nackt geliefert wurden, und beim Eintauchen dieser Elektroden im Wasser fand er, dass das Wasser von dem Strome einer statischen Maschine bei Beseitigung der Funkenentladung zertheilt wurde, und dass von jeder Spitze ein Gasstrom aufstieg, welcher demjenigen von einer Batterie ähnlich war und ein Gemisch von Wasserstoff und Sauerstoff lieferte. Wollaston bemerkt jedoch, dass die Wirkung nicht mit derjenigen einer Batterie übereinstimmt, denn es wird sowohl Sauerstoff als Wasserstoff an *jeder* Elektrode entwickelt;“

„Dies ist nur eine Wiederholung eines Versuches, welcher von Pearson im Jahre 1797 und von Paets van Troostwyk und Deiman 1789 oder früher angestellt wurde.“

Der Bericht Faraday's enthält ferner, dass die Gasentwicklung an jeder Elektrode unabhängig von der anderen stattfindet, was dadurch dargelegt wird, dass die Gasentwicklung von einer Elektrode beim Ersetzen der anderen mit einem nackten Drahte oder mit dem Finger jedoch unverändert stattfindet. Ferner wird die Gasentwicklung bei Parallelschaltung einer Funkenstrecke gesteigert, und dies um so mehr, je grösser die Funkenlänge ist.

Zu obigem will ich nur aus eigener Erfahrung hinzufügen, dass auch nach dem Unterbrechen der Leitung durch Aufhängen der einen Wollaston'schen Spitzenelektrode auf den zugehörigen Conductor die Gasentwicklung von der übrigen im Wasser gelieferten Elektrode jedoch fortwährend besteht.

Aus den oben erwähnten Thatsachen geht hervor, dass die Gasentwicklung von den Potentialschwankungen der Elektroden herrühren muss, wobei eine abwechselnde Strömung

1) Vgl. z. B. J. Preeht, Wied. Ann. **66**. p. 1022. 1898.

2) M. Faraday, Exp. Res. I. Art. p. 327—329. 1849.

von der Elektrode zum Wasser und umgekehrt stattfinden muss. Die elektromotorische Gegenkraft bei Zerlegung von Wasser bei constantem Strome wird von den Herren Koch und Wüllner zu etwa 3,8 Volt geschätzt, und man kann daraus schliessen, dass die Potentialschwankungen mehr als 7,6 Volt betragen müssen. Das Vorhandensein einer Wellenbewegung kann schwerlich von irgend einem, der die oben beschriebene Erscheinung beobachtet hat, bezweifelt werden.

Die Unabhängigkeit des Funkenpotentials von der Capacität der Leydener Flasche.

Es wurde von Hrn. Jaumann in seiner Arbeit die Schlussfolgerung gezogen, dass die Capacität der Leydener Flasche die zeitliche Aenderung des Potentials abschwächen und dadurch ein Erhöhen des Entladungspotentials bewirken sollte. Nach Hrn. Heydweiller¹⁾ ist jedoch das Entladungspotential von der Capacität der Leydener Flasche beinahe unabhängig. Beim Unterbrechen der Verbindung der einen Belegung mit der Erde wurden von letzterem etwa dieselben Entladungspotentiale erhalten, nur mit dem Unterschied, dass dabei die Einzelbeobachtungen voneinander sehr abwichen. Eine nähere Betrachtung der Vorgänge im Conductor ergibt jedoch, dass die von der Capacität erwartete Dämpfung des Differentialquotienten dE/dt nicht bestätigt wird. Dies wird lediglich aus einem einfachen Beispiele ersichtlich.

Es wird vorausgesetzt, dass die zur Funkenentladung erforderliche Elektrizitätsmenge von einer Holtz'schen Maschine geliefert wird. Der eine, zur Erde abgeleitete Conductor ist mit einer Kugel des Funkenmikrometers verbunden. Vom Saugkamme des zweiten Conductors führt ein Kupferdraht zum Funkenmikrometer und ein genau gleicher Draht zur Leydener Flasche und zum Elektrometer. Diese Drähte haben denselben Widerstand W und denselben Coefficienten der Selbstinduction L . Es sei C_0 die Capacität des Saugkammes, C_1 diejenige der Mikrometerkugel und C_2 die der Leydener Flasche. Die Stromstärke im Verbindungsdrahte $C_0 C_1$ zur Zeit t sei i_1 und die Stromstärke im Drahte $C_0 C_2$ sei i_2 . Es wird voraus-

1) A. Heydweiller, Wied. Ann. 48. p. 218. 1893.

gesetzt, dass dem Saugkamme plötzlich eine Elektrizitätsmenge Q_0 zur Zeit $t = 0$ erteilt wird, und das Potential des Saugkammes zur Zeit t bezeichnen wir mit V_0 , die Potentiale der Mikrometerkugel und der Leydener Flasche mit V_1 und V_2 . Daraus erhält man folgende Bewegungsgleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} L \frac{d i_1}{d t} + W i_1 = V_0 - V_1, \\ L \frac{d i_2}{d t} + W i_2 = V_0 - V_2, \\ i_1 = C_1 \frac{d V_1}{d t}, \\ i_2 = C_2 \frac{d V_2}{d t}, \\ i_1 + i_2 = -C_0 \frac{d V_0}{d t}, \end{cases}$$

welche freilich nicht den wirklichen Vorgängen entsprechen, denn diese rühren von einer Summation mehrerer solcher Bewegungen her. Aus den obigen Gleichungen ergibt sich bei Eliminieren von i_1 und i_2 :

$$(2) \quad \begin{cases} L C_1 \frac{d^2 V_1}{d t^2} + W C_1 \frac{d V_1}{d t} + V_1 = V_0, \\ L C_2 \frac{d^2 V_2}{d t^2} + W C_2 \frac{d V_2}{d t} + V_2 = V_0, \\ C_0 \frac{d V_0}{d t} + C_1 \frac{d V_1}{d t} + C_2 \frac{d V_2}{d t} = 0. \end{cases}$$

Beim Integrieren der letzten Gleichung erhält man

$$(3) \quad C_0 V_0 + C_1 V_1 + C_2 V_2 = \text{const.} = Q_0,$$

wenn die statische Elektrizität des Systems vernachlässigt wird. Beim Eliminieren von V_0 ergibt sich

$$(4) \quad \begin{cases} L \frac{d^2 V_1}{d t^2} + W \frac{d V_1}{d t} + V_1 \left(\frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_1} \right) + \frac{C_2 V_2}{C_0 C_1} = \frac{Q_0}{C_0 C_1}, \\ L \frac{d^2 V_2}{d t^2} + W \frac{d V_2}{d t} + V_2 \left(\frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_2} \right) + \frac{C_1 V_1}{C_0 C_2} = \frac{Q_0}{C_0 C_2}. \end{cases}$$

Wenn die Beziehung $u = V_2 + x V_1$ eingeführt wird, und die Gleichungen (4), nach vormaligem Multipliciren der ersten Gleichung mit x , addirt werden, so ergibt sich

$$(5) \quad L \frac{d^2 u}{d t^2} + W \frac{d u}{d t} + k \cdot u = \frac{Q_0}{C_0} \left(\frac{x}{C_1} + \frac{x}{C_2} \right),$$

wenn k und x die Bedingungsgleichungen

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{x}{C_0} + \frac{x}{C_1} + \frac{C_1}{C_0 C_2} = kx, \\ \frac{x C_2}{C_0 C_1} + \frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_2} = k \end{cases}$$

erfüllen. Die Wurzeln der Bedingungsgleichungen sind

$$(7) \quad \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} = \frac{C_0}{2 C_2} \cdot \left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right) \pm \frac{1}{2 C_2} \cdot \sqrt{C_0^2 \cdot \left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right)^2 + 4 C_1^2}$$

und

$$(7a) \quad \begin{matrix} k_1 \\ k_2 \end{matrix} = \frac{1}{C_0} + \frac{1}{2 C_1} + \frac{1}{2 C_2} \pm \frac{1}{2 C_0 C_1} \cdot \sqrt{C_2^2 \cdot \left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right)^2 + 4 C_1^2}.$$

Die Differentialgleichung (5) hat zwei Lösungen, die durch die Hüllsgleichung

$$(8) \quad L z^3 + W z + k = 0$$

bestimmt werden. Wenn der grössere Wert k_1 aus (7a) in Gleichung (8) eingesetzt wird, so erhält man als zugehörige Wurzeln zwei complexe Zahlen, die wir kurz mit $-\alpha \pm \beta i$ bezeichnen. Die dem kleineren Werte k_2 entsprechenden Wurzeln werden mit $-\alpha \pm \gamma$ bezeichnet. Die Lösungen der Differentialgleichung sind folgende:

$$(9) \quad \begin{cases} u_1 = V_2 + x_1 V_1 = \frac{Q_0}{k_1 C_0} \cdot \left(\frac{x_1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \\ \quad + \varepsilon^{-\alpha t} [A_1 \cos \beta t + A_2 \sin \beta t], \\ u_2 = V_2 + x_2 V_1 = \frac{Q_0}{k_2 C_0} \cdot \left(\frac{x_2}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \\ \quad + \varepsilon^{-\alpha t} [B_1 \varepsilon^{\gamma t} + B_2 \varepsilon^{-\gamma t}]. \end{cases}$$

Berücksichtigt man, dass die Anfangsbedingungen

$$V_1 = 0, \quad V_2 = 0, \quad i_1 = 0 \quad \text{und} \quad i_2 = 0$$

sind, so erhält man für die Integrationsconstanten folgende Werte:

$$A_2 = \frac{\alpha}{\beta} \cdot A_1, \quad A_1 = -\frac{Q_0}{k_1 C_0} \left(\frac{x_1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right),$$

$$B_2 = -\frac{\alpha - \gamma}{\alpha + \gamma} \cdot B_1, \quad B_1 = -\frac{Q_0}{k_2 C_0} \frac{\alpha + \gamma}{2 \gamma} \left(\frac{x_2}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right).$$

Beim Einsetzen dieser Werte in den Gleichungen (9) und Subtrahieren ergibt sich

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} (x_1 - x_2) V_1 &= Q_0 \cdot \frac{k_1 - k_2}{k_1 k_2 C_2^2} \\ &- \frac{Q_0}{C_2} \left(1 - \frac{1}{k_1 C_2} \right) \varepsilon^{-\alpha t} \left(\cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right) \\ &+ \frac{Q_0}{C_2} \cdot \left(1 - \frac{1}{k_2 C_2} \right) \cdot \frac{\alpha + \gamma}{2\gamma} \cdot \varepsilon^{-\alpha t} \left[\varepsilon^{\gamma t} - \frac{\alpha - \gamma}{\alpha + \gamma} \cdot \varepsilon^{-\gamma t} \right], \end{aligned} \right.$$

wenn man dabei die Gleichungen (6) berücksichtigt.

Wenn die Capacität der Leydener Flasche C_2 sehr gross gegenüber C_0 und C_1 ist, so kann man $1/k_1 C_2$ und $1/k_2 C_2$ neben 1 vernachlässigen. Ferner erhält man annäherungsweise

$$x_1 - x_2 = \frac{1}{C_2} \sqrt{C_0^2 + 4 C_1^2}$$

und

$$\frac{k_1 - k_2}{k_1 k_2 C_2^2} = \left(\frac{1}{C_2^2} \cdot \sqrt{C_0^2 + 4 C_1^2} \right) = \frac{\sqrt{C_0^2 + 4 C_1^2}}{C_2^2}.$$

Aus der Gleichung (10) ergibt sich somit

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} V_1 &= \frac{Q_0}{C_2} - \frac{Q_0}{\sqrt{C_0^2 + 4 C_1^2}} \cdot \varepsilon^{-\alpha t} \left(\cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right) \\ &+ \frac{Q_0}{\sqrt{C_0^2 + 4 C_1^2}} \cdot \varepsilon^{-\alpha t} \cdot \frac{\alpha + \gamma}{2\gamma} \cdot \left(\varepsilon^{\gamma t} - \frac{\alpha - \gamma}{\alpha + \gamma} \cdot \varepsilon^{-\gamma t} \right). \end{aligned} \right.$$

Es geht somit hervor, dass zur Zeit $t = \infty$ der Mikrometerkugel ein Potential Q_0/C_2 (oder ohne Annäherung $Q_0/C_0 + C_1 + C_2$) erteilt worden ist. Wird dieselbe Elektrizitätsmenge Q_0 von Zeit zu Zeit wieder dem Saugkamme erteilt, so folgt, dass dem Conductor dabei ein Potential $\Sigma Q_0/C_2$ allmählich erteilt wird. Das Potential Q_0/C_2 ist jedoch verschwindend klein gegenüber den Potentialschwankungen der schwingenden Bewegung, deren Amplitude $Q_0/\sqrt{C_0^2 + 4 C_1^2}$ sehr gross ist. Daher muss auch bei dem oben erwähnten elektrolytischen Versuche die von den Potentialdifferenzen Q_0/C_2 bewirkte Strömung ohne nennenswerten Einfluss neben den periodischen Potentialschwankungen sein, und das eigentümliche Auftreten von Wasserstoff und Sauerstoff an derselben Elektrode ist aus der Gleichung (11) eine unmittelbare Folge. Die unbedachte Schlussfolgerung des Hrn. Jaumann, nach welcher die schwingende Bewegung von der Leydener Flasche gedämpft

werden sollte, wird nicht von der Gleichung (11) bestätigt; die Schwingungsamplitude ist ja von der Capacität C_2 unabhängig. Wird jedoch die Capacität der Leydener Flasche so, wie es von Hrn. Heydweiller¹⁾ gemacht worden ist, vermindert, so tritt statt der Exponentialglieder in der letzten Gleichung (9) eine zweite schwingende Bewegung hinzu und das Glied Q_0/C_2 in (11) wird dabei verhältnismässig gross, das Potential steigt schnell auf, und die Einzelbeobachtungen werden daher unsicher.

Ein bemerkenswerter Umstand bei der Gleichung (11) ist, dass sie auch für $C_2 = \infty$ gelten muss, und dass somit die Schwingungen in dem zur Erde abgeleiteten Conductor auch bestehen müssen. Diese Schlussfolgerung kam mir zwar etwas verdächtig vor; jedoch bei Wiederholung der oben erwähnten Versuche mit den Wollaston'schen Spitzelektroden, wobei der eine Conductor der Holtz'schen Maschine mit den Gas- und Wasserleitungen verbunden wurde, fand eine Gasentwicklung an der Elektrode des zur Erde abgeleiteten Conductors noch fortwährend statt. Es kann daher kein Zweifel darüber entstehen, dass die wirklichen Vorgänge mit der Theorie eine etwaige Uebereinstimmung zeigen müssen.

Aus der Gleichung (11) lässt sich die Stromstärke i_1 leicht ableiten; man erhält

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{i_1}{C_1} = \frac{dV_1}{dt} = \frac{Q_0}{\sqrt{C_0^2 + 4C_1^2}} \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} \cdot e^{-\alpha t} \sin \beta t \\ - \frac{Q_0}{\sqrt{C_0^2 + 4C_1^2}} \cdot \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{2\gamma} \cdot e^{-\alpha t} (\varepsilon^{\gamma t} - e^{-\gamma t}). \end{cases}$$

Wie oben bemerkt wurde, hängt die Entladung von einem Potential, das durch Summation der einzelnen Glieder, die in Gleichung (11) dargestellt worden sind, erhalten wird, ab, und die zugehörige Stromstärke oder die zugehörige zeitliche Aenderung des Potentials rührt ebenfalls von einer Summation der in Gleichung (12) dargestellten Glieder her. Da jedoch diese Summation zu Gleichungen derselben Form, wie die der einzelnen Glieder führt, so können wir die in (11) und (12) dargestellten Gleichungen unmittelbar verwenden, nur mit dem

1) A. Heydweiller, l. c.

Unterschiede, dass Q_0/C_2 in (11) von dem Entladungspotentiale E ersetzt wird.

Ferner sind die Entladungsbedingungen nicht sicher festgestellt worden. Zwar wird, nach Hrn. Jaumann, die Entladung von der Grösse $E(dE/dt)$ oder $V_1(dV_1/dt)$ bedingt; nach Faraday hängt dagegen die Entladung von der Energie Ei ab. Diese Grössen sind, wie oben ersichtlich ist, nur bei der Constante C_1 verschieden.

Betrachten wir nun den Fall, wo E in dem aus Gleichung (11) erhaltenen Werte

$$V_1 = E - \frac{Q_0}{\sqrt{C_0^2 + 4C_1^2}} \cdot e^{-\alpha t} \left(\cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right)$$

sehr gross gegenüber der Amplitude $Q_0/\sqrt{C_0^2 + C_1^2}$ ist, so folgt, dass die Grösse Ei nahezu bei dem Maximumwerte der Stromstärke i ein Maximum erreicht, und wenn nur das periodische Glied in (12) in Betracht kommt, so ergibt sich

$$(13) \quad \begin{cases} (E_1 i_1)_{\max} = \frac{Q_0}{\sqrt{C_0^2 + 4C_1^2}} \cdot e^{-\frac{\alpha}{\beta} \arctg \frac{\beta}{\alpha}} \cdot \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \\ \left[E - \frac{Q_0}{\sqrt{C_0^2 + 4C_1^2}} \cdot e^{-\frac{\alpha}{\beta} \arctg \frac{\beta}{\alpha}} \cdot \frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right] \end{cases}$$

Ist die Funkenlänge λ dem Maximum von $V_1 i_1$ oder von $V_1(dV_1/dt)$ proportional, so ergibt sich

$$(\lambda \text{ oder}) \quad \frac{\lambda}{C_1} = \frac{k Q_0}{\sqrt{C_0^2 + 4C_1^2}} \cdot e^{-\frac{\alpha}{\beta} \arctg \frac{\beta}{\alpha}} \cdot \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left[E - \frac{Q_0}{\sqrt{C_0^2 + 4C_1^2}} \cdot e^{-\frac{\alpha}{\beta} \arctg \frac{\beta}{\alpha}} \cdot \frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right],$$

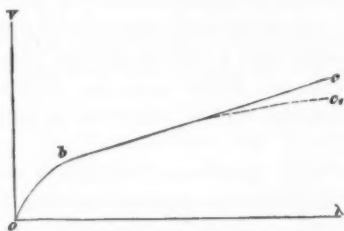
oder kurz

$$(14) \quad \lambda = \frac{1}{b} (E - a), \quad E = a + b \lambda,$$

wo a und b nur von den Constanten des Leiters und von der Spitzenwirkung des Saugkammes abhängen. Die Gleichung (14) ist von Hrn. Chrystal aus den Beobachtungen des Hrn. Baillie abgeleitet worden.¹⁾ Diese Formel gilt nur für den Fall, dass E gross gegenüber den Schwankungen des Potentials ist, und

1) Vgl. G. Wiedemann's Elektrizität IV. 2. p. 657. 1885; Beibl. 6. p. 881. 1882.

bei kleinerer Funkenlänge, wo die Schwankungen von vorwiegender Bedeutung sind, ist folglich das Entladungspotential E kleiner als das aus (14) berechnete. Im allgemeinen wird die Beziehung zwischen der Funkenlänge λ und dem Entladungspotential E durch eine Curve abc , die aus einer Geraden bc und einer gekrümmten Linie ab besteht, charakterisirt (vgl. Figur). Jedoch ist am oftsten die Gerade bc durch eine schwach gekrümmte Curve bc_1 vertreten, was wohl davon kommt, dass die Beobachter der Scheibe der Holtz'schen Maschine eine etwas grössere Umdrehungsgeschwindigkeit bei höheren Entladungspotentialen gegeben haben. Diese Abweichungen von der



Geraden bc sind jedoch immer unbedeutend. Nach der Jaumann-Faraday'schen Anschauung hängt die Gerade bc von dem Umstande ab, dass die Potentialschwankungen klein neben dem statischen Potentiale sind, während dagegen beim gekrümmten Teile der Curve ab die Potentialschwankungen über dem statischen Potentiale walten und das letztere daher nicht zu seinem vollen Betrage kommt.

Es war eigentlich nur meine Absicht, die beiden oben besprochenen Einwände gegen die Jaumann'sche Entladungsbedingung zu erläutern; wenn ich jedoch die oben dargestellten Schlussfolgerungen über die Entladungsvorgänge nicht zurückhalten konnte, obwohl sämtliche Beobachtungen sehr wenig darüber entscheiden lassen und nicht einmal einen Ausspruch zwischen den beiden möglichen Entladungsbedingungen Ei und $E(dE/dt)$ zugeben, so bin ich genötigt, an die unsicheren Voraussetzungen, die der Formel (14) zur Grundlage dienen, zu erinnern. Es ist wohl ersichtlich, dass die Vorgänge in der Funkenstrecke nicht unmittelbar von den Vorgängen im Conductor abhängen, und dafür können bedeutende Fehler

bei einem Versuche, eine Beziehung der Funkenentladung zu den Vorgängen im Conductor zu erhalten, entstehen. Die vergrößerten Potentialschwankungen, die von dem Entladungsfunken selbst hervorgebracht werden, welche theils in der vermehrten Gasentwicklung bei Zerteilung von Wasser, theils in einer Verkleinerung des Entladungspotentiales wahrgenommen werden können, scheinen eine Wechselwirkung zwischen dem Leiter und dem Dielektricum anzudeuten, von welcher wir keine Rechnung geben können. Wahrscheinlich muss man dabei die im Dielektricum stattfindenden Schwingungen in Rechnung ziehen und ihre Rückwirkung auf den Leiter verwerthen. Die beiden Schwingungen, nämlich die im Leiter und die im Dielektricum, mögen wahrscheinlich dabei interferiren, und es kann dabei entweder eine Verstärkung oder eine Abschwächung eintreten; im ersteren Falle wird das Funkenpotential vermindert, im letzteren erhöht (oder die Funkenstrecke „verdorben“).

Wenn die oben gegebene Darstellung wenigstens dazu beitragen kann, dass die Beobachter die von Hrn. Jaumann nachgewiesenen Thatsachen bei ihren künftigen Versuchen berücksichtigen, so habe ich die Absicht mit dieser Arbeit erzielt.

(Eingegangen 3. October 1900.)

**6. Abhängigkeit des specifischen Torsionswiderstandes einiger Metalldrähte von der Spannung;
von John Robert Benton.**

(Auszug aus der Göttinger Inaugural-Dissertation.)

1. Bisher gemachte experimentelle Untersuchungen über die Abhängigkeit des Torsionswiderstandes von der Spannung.

Es ist zuerst von Lord Kelvin¹⁾ vorgeschlagen worden, die Abhängigkeit der Torsionselasticität von der Längsdehnung experimentell zu untersuchen. Später haben Cantone und Michelucci²⁾ Experimente über diesen Gegenstand ausgeführt. Sie haben Drähte aus Eisen, Kupfer, Messing, Nickel und Silber untersucht und sind folgendermaassen verfahren: der Draht wurde vertical aufgehängt und mittels einer auf ihm befestigten Welle durch Gewichte tordirt. Dann wurde er wiederholt belastet und entlastet durch eine Vorrichtung, die einen verticalen Zug hervorbrachte, und die Aenderung des Torsionswinkels bei verschiedenen Anfangstorsionen gemessen. Bei den meisten Substanzen nahm der Torsionswinkel mit wachsender Belastung zu, was eine Abnahme des Torsionswiderstandes bedeutet; Nickel zeigte aber ein umgekehrtes Verhalten.

Nach Vorschlag des Hrn. Professor Voigt habe ich es unternommen, denselben Gegenstand ausführlicher zu untersuchen, und zwar nach einer von ihm angegebenen Methode.

Der Grundgedanke dieser Methode ist die Vergleichung der Schwingungen einer an einen Draht befestigten und durch

1) Lord Kelvin, Art. „Elasticity“, Encyclopedia Britannica.

2) M. Cantone u. E. Michelucci, Rend. Linc. (5) 6. p. 191 bis 198. 1897.

dessen Torsion bewegten trägen Masse mit einem und demselben Fadenpendel nach dem Coincidenzverfahren, wenn abwechselnd der Draht gedehnt und frei gelassen wird.

2. Versuchsanordnung.

Zur Durchführung dieser Methode wurde folgende Anordnung benutzt (Fig. 1). Ein ungefähr 3 m langer Draht wurde mit seinem oberen Ende unter der Decke des Beobachtungsraumes in einer Klemme *a* befestigt; mit seinem unteren Ende wurde er in dem Ende eines um eine horizontale Axe *b'* drehbaren Hebels *b* eingeklemmt. Der Hebelarm war ungefähr 8 cm lang. Das untere Ende des Drahtes konnte aber keine Drehungen ausführen; eine Dehnung des Drahtes durch Anbringung von Gewichten *w* wurde jedoch nicht verhindert. Bei der oberen Klemme *a* habe ich besonders darauf geachtet, dass der Befestigungspunkt wirklich constant blieb, wenn sich der Draht bei der Belastung zusammenzog. Ich habe auch untersucht, ob sich die Klemme *a* bei der Belastung nach unten bewegt, habe aber keine Bewegung wahrnehmen können.

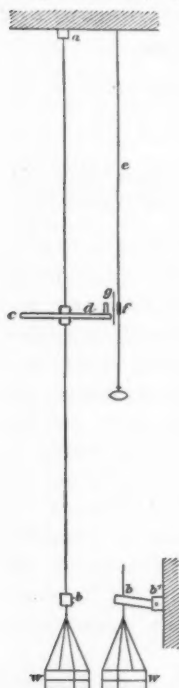


Fig. 1.

Genau in der Mitte des Drahtes wurde eine Messingscheibe *c*, deren Durchmesser 17,7 cm betrug, festgeklammert. Für verschieden dicke Drähte war es natürlich notwendig, verschieden schwere Scheiben zu benutzen; für meine dünnsten Drähte habe ich eine 0,7 cm dicke Scheibe, für dickere Drähte eine 1,5 cm dicke und für die dicksten die beiden Scheiben zusammen benutzt.

Auf dem Rande jeder Scheibe war eine Teilung in 36 Teile angebracht, damit bei den Schwingungen die Amplituden abgelesen werden konnten.

Die Scheibe machte Torsionsschwingungen. Um die Aenderung der Schwingungsdauer zu bestimmen, sollte dieselbe nach

der Coincidenzmethode mit derjenigen eines Fadenpendels verglichen werden.

Es sei S die Periode der Scheibe, T diejenige des Pendels. Wenn μ Scheibenschwingungen in genau derselben Zeit wie ν Pendelschwingungen stattfänden, so würde $\mu S = \nu T$ sein.

Wenn dies nicht genau stattfindet und zu einem gewissen Zeitpunkt beide Schwingungen merklich dieselbe Phase haben, so werden nach dem Intervall μS die Phasen etwas mehr differieren, als im Ausgangspunkt; diese Phasendifferenz wird in jedem μS wachsen und schliesslich merklich 2π erreichen. Ein Phasenunterschied von 2π bedeutet aber, dass das Pendel eine ganze Schwingung mehr oder weniger ausgeführt hat, wie die Scheibe. Wenn die Scheibe bis dahin h Schwingungen gemacht hat, so gilt

$$(1) \quad (h\nu \pm 1)T = \mu h S.$$

Sind h , μ , ν und T bekannt, so ist S leicht zu ermitteln. Um diese Grösse zu bestimmen, muss man ein Mittel haben, die Phasen der Scheibe und des Pendels zu vergleichen. Zu diesem Zwecke wurden folgende Einrichtungen getroffen:

Am Rande der Scheibe wurde ein 1 cm hohes, rechtwinkelig gebogenes Stück Blech d (Fig. 2) senkrecht aufgestellt. Seine beiden Schenkel schlossen gleiche Winkel mit dem Radius der Scheibe ein, sodass der durch sie verursachte Luftwiderstand bei einer Torsionsschwingung der Scheibe in dem einen Sinn der gleiche war, wie bei einer Torsionsschwingung in dem anderen Sinn. Die eine Seite des Blechstücles wurde weiss gefärbt und von dem durch eine Linse concentrirten Licht eines gewöhnlichen Gasbrenners stark beleuchtet; die andere Seite wurde geschwärzt. Das ganze Blechstück war längs des Randes der Scheibe verschiebbar, sodass es leicht beliebig gestellt werden konnte.

Das Fadenpendel war unter der Zimmerdecke so befestigt, dass der Faden im Ruhezustande ganz nahe bei der Scheibe hing. In der Höhe des Blechwinkels trug der Faden einen ungefähr 1,0 cm langen schwarzen Cylinder f (Fig. 1) von solchem Durchmesser, dass er die weisse Seite des Blechstücles genau

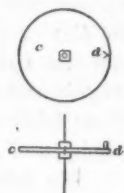


Fig. 2.

deckte, wenn man ihn in der Richtung einer durch den Draht und den Pendelfaden gezogenen Linie ansah. Zwischen der Scheibe und dem Faden befand sich ein schwarzer Schirm g mit einem viereckigen Loch, dessen Breite genau so gross wie der Durchmesser des Cylinders war. Wenn alles richtig aufgestellt war, und die Scheibe und das Pendel ruhten, so waren die Centra des Drahtes, des weissen Blechstückes, des Loches und des Cylinders in derselben geraden Linie. Ein Beobachtungsfernrohr wurde in der Entfernung von ungefähr 3 m in dieser Linie aufgestellt, und die Coincidenzen bei schwingendem Pendel und Scheibe wurden durch dasselbe beobachtet.

Die Länge des Pendels wurde so eingerichtet, dass eine Coincidenz ungefähr alle $2\frac{1}{2}$ Minuten vorkam. Das Pendelgewicht war eine Linse aus Blei, deren Dicke in der Mitte 2,0 cm, deren Durchmesser 5,5 cm und deren Gewicht 260 g betrug. Der Faden war ein dünner Stahldraht. Das Pendel verlor seine Bewegung sehr langsam; die Amplitude nahm während einer Reihe von Beobachtungen nur wenig ab, und da sie niemals mehr als $1\frac{1}{2}^\circ$ betrug, so konnte man die Periode als absolut constant betrachten. Die Abhängigkeit der Periode von der Amplitude ist nämlich durch die bekannte Formel

$$T_\phi = T_0 \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\phi}{4} + \dots \right)$$

angegeben; und der Wert von

$$\frac{1}{4} T_0 \sin^2 \frac{\phi}{4} \quad \text{für } \phi = 1\frac{1}{2}^\circ$$

ist ungefähr $0,00001 T_0$, was innerhalb der Fehlergrenze meiner Beobachtungen liegt.

Die Schwingungsdauer der Scheibe hing bei den meisten Drähten beträchtlich von ihrer Amplitude ab.

Durch sorgfältig ausgeführte lange Reihen von Beobachtungen habe ich das Gesetz dieser Abhängigkeit aufgesucht und gefunden, dass das Zeitintervall zwischen zwei aufeinander folgenden Coincidenzen mit sehr grosser Annäherung linear von der Amplitude abhängt. Dies gilt bis etwa 50° ; ich habe aber gewöhnlich Amplituden von $10-20^\circ$, niemals von mehr als 35° benutzt.

Die Temperatur wurde durch Thermometer am oberen Ende, in der Mitte, und am unteren Ende des Drahtes beob-

achtet und ziemlich constant erhalten dadurch, dass man eine in ein kühleres Zimmer führende Thür mehr oder weniger weit öffnete. Plötzliche Luftströmungen wurden vorsichtig vermieden.

3. Behandlung der Drähte.

Jeder Draht wurde sogleich, nachdem er oben eingeklemmt war, unter der grössten sicheren Belastung durch Erhitzen zur Rotglut mit einem Bunsenbrenner zweimal ausgeglüht. Dann wurde er mit einem etwas grösseren Gewicht belastet, als die grösste Belastung in den folgenden Beobachtungen betragen sollte. Unter dieser Belastung hing er ein bis zwei Tage ganz frei; dann wurde er unten festgeklemmt und mit den Beobachtungen begonnen.

4. Beobachtungsmethode.

Für die Methode der Coincidenzen gilt nach p. 473 die Formel

$$(2) \quad (2h\nu \pm 1)T = h\mu S = \Theta,$$

wobei T , bez. S , die Schwingungsdauer des Pendels, bez. der Scheibe, ν die Anzahl der Pendelschwingungen, die in ungefähr derselben Zeit wie μ Scheibenschwingungen stattfinden, bezeichnet; h bezeichnet eine so gewählte Grösse, dass $h\nu \pm 1$ Pendelschwingungen mit $h\mu$ Scheibenschwingungen innerhalb der Beobachtungsfehlergrenzen genau übereinstimmen; Θ , die Coincidenzdauer, wird durch die Gleichung (33) definirt. Bei meinen Beobachtungen hatte μ immer den Wert 1; ν war entweder 1, 2 oder 3.

Eine innerhalb der Beobachtungsfehler genaue Coincidenz der Scheibe und des Pendels kam nur selten in der Lage vor, worauf das Teleskop eingestellt war. Ich habe also nur den Zeitpunkt beobachtet, wobei das Blechstück und der Cylinder beinahe gleichzeitig bei dem Loch vorbeigingen, und die Abweichung von einer genauen Coincidenz durch Beobachtung einer Reihe angenäherter Coincidenzen geschätzt. Dies kommt darauf hinaus, dass $2h$ nicht mehr als eine ganze, sondern als eine gebrochene Zahl genommen wird. Die Bestimmung des Zeitpunktes der angenäherten Coincidenz geschah mittels einer Stopuhr, die sogleich mit einer gewöhnlichen, mit Secundenzeiger versehenen Uhr verglichen wurde. Bei jeder Coincidenz wurde die Schwingungsamplitude der

Scheibe abgelesen. Es gilt nach dem im vorletzten Paragraph Gesagten für das Zeitintervall Θ zwischen zwei aufeinander folgenden Coincidenzen die Gleichung

$$(3) \quad \Theta = \Theta_0 + b A,$$

wobei A die Amplitude ist, die als mittlere Amplitude während Θ genommen werden kann, b eine Constante, und Θ_0 das Zeitintervall zwischen zwei Coincidenzen bei verschwindend kleiner Amplitude bezeichnet. Letztere ist die Grösse, aus der sich die Schwingungsdauer der Scheibe zur Berechnung der Constanten der Torsionselasticität ergibt.

Für jeden Draht habe ich die Schwingungsdauer bei fünf verschiedenen Belastungen untersucht, und zwar habe ich mit der kleinsten angefangen und der Reihe nach bei jeder anderen Belastung bis zur grössten beobachtet; dann habe ich eine Reihe Beobachtungen von der grössten bis zur kleinsten Belastung gemacht, sodann wieder eine Reihe von der kleinsten bis zur grössten. Es wurden also für jeden Draht drei Reihen Beobachtungen angestellt. Bei jeder Belastung wurde gewöhnlich eine Reihe von zehn Coincidenzen beobachtet, bei denjenigen Drähten aber, die ausserordentlich rasch abnehmende Amplituden ergaben, habe ich mich mit der Beobachtung von sieben Coincidenzen begnügen müssen; bei anderen Drähten ist es dagegen nötig gewesen, 15 bis 20 Coincidenzen zu bestimmen, um die Abhängigkeit von der Amplitude deutlich beobachten zu können. Ich habe also gewöhnlich bei jeder Belastung 30 Coincidenzbestimmungen gemacht. Gleichungen von der Form (3) wurden aufgestellt und nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgerechnet. Aus den so gefundenen Werten von Θ_0 für jede Belastung ergeben sich nach (33) die Schwingungsdauern S_0 der Scheibe für unendlich kleine Amplituden, wenn man die Periode T des Pendels kennt, die sich leicht direct bestimmen lässt. Für die eigentliche Aufgabe dieser Arbeit kommt der absolute Wert von S allerdings nicht in Betracht, sondern nur die Aenderung seines Wertes bei verschiedenen Belastungen, und diese ergibt sich auch ohne Kenntniss von T , wenn nur dessen Grösse constant gehalten wird. Aber der absolute Wert der Torsionsconstante m hat doch auch ein gewisses Interesse, und dieser berechnet

sich aus der Schwingungsdauer S der Scheibe und dem Trägheitsmoment K der Scheibe und des Drahtes zu

$$(4) \quad m = \frac{2\pi K}{S^2} \cdot \frac{l}{r^4},$$

wobei l die Länge des Drahtes, r sein Halbmesser ist.

Was die Aenderungen von m mit der Belastung betrifft, so folgt aus (34), wenn die sich auf einen Anfangszustand beziehenden Grössen mit dem Index $_0$ bezeichnet werden,

$$(5) \quad \frac{m}{m_0} = \frac{S_0^2}{S^2} \cdot \frac{l}{l_0} \cdot \frac{r_0^4}{r^4} \quad \text{oder} \quad m = m_0 \left(\frac{S_0}{S} \right)^2 \left(\frac{l}{l_0} \right) \left(\frac{r_0}{r} \right)^4.$$

Die Grösse (l/l_0) wurde durch directe Bestimmung der Längsdehnung erhalten. Eine Nadel wurde an dem Hebel b (Fig. 1) dicht bei dem Drahte befestigt und ihre Senkung bei Belastung des Drahtes mittels eines mit Schraubenmikrometer versehenen Mikroskopes gemessen. Der Wert einer Umdrehung der Schraube wurde durch Vergleich mit einem genauen Millimetermaassstab bestimmt. Die Bestimmung des Verhältnisses r_0/r war Gegenstand einer besonderen Nebenarbeit, die unten beschrieben werden wird. l/l_0 und r_0/r folgen innerhalb der Fehlergrenzen meiner Beobachtungen dem Hooke'schen Gesetz; die höheren, von J. O. Thomson untersuchten Glieder brauchen bei ihnen daher nicht in Betracht gezogen zu werden.

5. Versuchsanordnung zur Bestimmung der Quercontraction gedehnter Drähte.

Nach dem Vorschlag von Voigt habe ich versucht, die seitliche Zusammenziehung von Drähten mittels Interferenzstreifen direct zu beobachten. Einen ähnlichen Versuch haben schon Stromeyer und Kennedy¹⁾ gemacht. Sie haben mit dicken Stäben (Durchmesser bis 30 mm) und entsprechend grossen dehnenden Kräften operirt; zwei Platten pp (Fig. 3) wurden

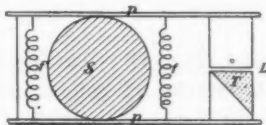


Fig. 3.

von beiden Seiten durch Federn ff gegen den Stab S gepresst; die eine Platte trug eine reflectirende Oberfläche o , die andere

1) C. E. Stromeyer u. W. Kennedy, Proc. Roy. Soc. 55. p. 373. 1894.

ein mit ihr beinahe in Berührung stehendes Totalreflexionsprisma *T*. Homogenes Licht wurde von dem Prisma gegen die dünne Luftschicht *L* reflectirt; die entstehenden Interferenzstreifen wurden wieder von dem Prisma nach aussen reflectirt. Wenn sich der Stab zusammenzog, so verminderte sich die Dicke der Luftschicht und die Interferenzstreifen änderten sich.

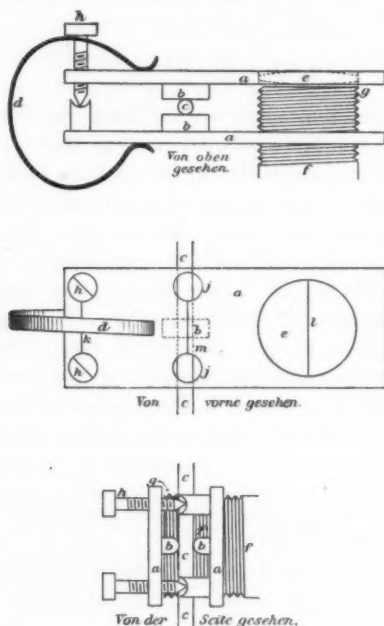


Fig. 4.

benutzt (Fig. 4). Auf die Messingplatten *aa* sind abgerundete Stahlstücke *bb* gelötet und gegen den Draht *c* mittelst der Feder *d* mässig angedrückt. Die eine Platte enthält eine schwach gekrümmte Linse *e*, die andere ein Rohr *f*, an dessen Ende sich eine Planplatte *g* aus Glas befindet. Das Rohr besitzt ein Gewinde, durch welches der Abstand der Platte von der Linse regulirt werden kann. Die hintere Seite der Glasplatte ist geschwärzt. Mittels der Schrauben *hh* kann man erreichen, dass die Platte *g* der Centralebene der Linse *e* parallel

Durch Beobachtung der Anzahl Streifen, die an einem gegebenen Punkte vorbeimarschiren, ist die Dickenänderung der Schicht, also auch die Quercontraction des Stabes bestimmbar. Wie Stromeyer und Kennedy bemerkten, haben sich die Federn *ff* störend verhalten, sodass es ihnen erst gelungen ist, befriedigende Resultate zu erhalten, nachdem sie den oben beschriebenen Apparat durch Vergleich mit einer „Whitworth millionth measuring machine“ calibriert hatten.

Ich habe folgenden, von Voigt entworfenen Apparat be-

steht. Wenn dies geschieht, und die Platte in die unmittelbare Nähe der Linse gebracht wird, so entsteht bei homogenem Licht ein System Newton'scher Ringe. Wenn sich der Draht zusammenzieht, so nähern sich Linse und Platte, und es entstehen neue Interferenzringe. Jeder neue Ring entspricht einer Näherung von Platte und Linse von einer halben Wellenlänge des benutzten Lichtes, also von $294,5 \times 10^{-6}$ mm bei Anwendung von Natriumlicht. Um die Zusammenziehung des Drahtes hieraus zu bestimmen, muss man das Verhältnis kennen, das angiebt, wieviel kleiner die Näherung der Stücke b ist, als die Näherung von Linse und Platte. Es ist dies natürlich das Verhältnis der Entfernungen der Schrauben h h von dem Ringcentrum zu der Entfernung der Schrauben von dem Berührungspunkt der Stücke b b mit dem Drahte. Um diese Entfernungen bestimmen zu können, habe ich einen Strich k bei den Schrauben, einen Strich l auf der Linse, und einen Strich m vor der Stelle, wo der Draht ungefähr sein sollte, gezeichnet und die Abstände zwischen h , l und m ein für allemal gemessen. Dann war es nicht schwierig, den Abstand des Ringcentrums von l vermittelt eines mit Schraubenmesser versehenen Mikroskopes zu bestimmen; die Entfernung zwischen m und dem Drahtcentrum habe ich durch die Löcher j j beobachtet und das algebraische Mittel beider Angaben genommen.

Der zu untersuchende Draht c wurde folgendermaassen aufgehängt (vgl. Fig. 5). Auf dem Tisch a wurde der kräftige Eisenbügel b vertical befestigt.

Der Draht wurde in demselben festgeklemmt, wie die Figur ergibt. Er lief durch ein Loch im Tische, und trug unten mittels eines Hakens d eine Waagschale mit Gewichten e . Die Stange h , die den Haken mit der Waagschale verbindet, besass ein Loch, durch welches der um g drehbare Hebelarm f

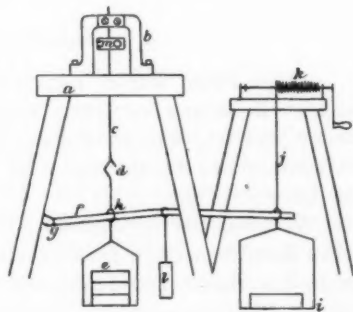


Fig. 5.

ging. Am Ende des Hebelarmes hängt eine Waagschale i , die aber mittelst des Fadens j und der Kurbel k frei von dem Hebelarm gehoben werden konnte. Der Hebelarm trug auch ein kleineres Gewicht l . Die Gewichte e und l dienten nur dem Zwecke, den Draht stets ein wenig gespannt zu halten (damit er gerade hängt) und den Hebelarm stets gegen die Waagschale e zu drücken (damit sein Auflagepunkt nicht rutschte). Die Spannungsänderungen, durch welche die Quercontraction hervorgerufen werden sollte, wurden durch Niederlassen und Emporheben der mit Gewichten belasteten Waagschale i bewirkt. Der Interferenzapparat befand sich an der Stelle m ; vor ihm auf dem Tische war ein in der Figur nicht dargestelltes Mikroskop aufgestellt. Nebenbei stand eine Natriumlichtquelle, die aus einem Bunsenbrenner und einem Platindraht mit einer Natriumcarbonatperle bestand. Es war dafür gesorgt, dass der Winkel zwischen dem einfallenden und reflectirten Strahl klein war, sodass sein Cosinus sich wenig von Eins unterschied.

Die beschriebene Vorrichtung hat die obige Gestalt erst nach mancherlei vergeblichen Versuchen erhalten; sie arbeitete aber schliesslich durchaus befriedigend.

6. Beobachtungsmethode.

Jeder Draht wurde, nachdem er eingeklemmt war, unter leichter Belastung vorsichtig ausgeglüht. Nachher wurde er weiter belastet, und zwar etwas stärker, als zur grössten der zu benutzenden Spannungen. Er blieb unter dieser Belastung ein bis zwei Tage.

Nachdem der Apparat so gestellt war, dass die Newton'schen Interferenzringe deutlich sichtbar waren, überzeugte ich mich, dass Linse und Platte nur sehr nahe aneinander, nicht aber in Berührung waren. Dies war natürlich der Fall, wenn die Entstehung neuer Ringe bei wachsender Belastung ununterbrochen vor sich ging, bis zu mehr als der maximalen Belastung, die benutzt werden sollte.

Dann wurde das Fadenkreuz des Mikroskopes auf das Ringcentrum eingestellt. Es wurde zunächst mittels einer Mikrometerschraube bis zum zehnten Ringe oben geschraubt und fünf Ablesungen des Mikrometers für die Stelle des

zehnten Ringes gemacht; dann wurde bis zum zehnten Ringe unten geschraubt und hier fünf Ablesungen gemacht, schliesslich wieder nach oben, wo nun wieder fünfmal abgelesen wurde. Die Differenz der Mittelwerte oben und unten giebt den Durchmesser des Ringes im Maass der Mikrometerschraube. Hierauf wurde der Draht belastet und die Anzahl der neu erscheinenden Ringe gezählt; dann wurde der Durchmesser des jetzigen zehnten Ringes bestimmt. Endlich wurde der Draht wieder entlastet, der Durchmesser des zehnten Ringes wieder gemessen und die Differenz zwischen ihm und demjenigen des neunten und elften bestimmt. Die Differenz zwischen dem Durchmesser des zehnten Ringes ohne und mit Belastung, dividirt durch die Differenz zwischen dem Durchmesser des zehnten Ringes und demjenigen des ihm nächstliegenden Ringes giebt den Bruchtheil eines Ringes an, der zu der Anzahl neuer Ringe zugezählt werden muss, zwecks Berechnung der Abstandsänderung zwischen der Linse und der Platte. Wenn z. B. der Durchmesser ohne Belastung 17,258, mit Belastung 17,482, und die mittlere Differenz zwischen den Durchmessern des zehnten und neunten, und des zehnten und elften Ringes 0,905 ist, und drei neue Ringe erschienen sind, so ist die Abstandsänderung

$$294,5 \left(3 + \frac{17,482 - 17,258}{0,905} \right) \cdot 10^{-6} = 956 \times 10^{-6} \text{ mm.}$$

Nachdem zwei solche Bestimmungen für verschiedene Stellen des Drahtes gemacht waren, wurde der Draht um 90° gedreht, wieder eingeklemmt und ausgeglüht (aber nur ein paar Stunden unter Maximalbelastung hängen gelassen) und wieder zwei Bestimmungen für verschiedene Stellen gemacht. So sind für jeden Draht wenigstens vier Bestimmungen durchgeführt.

Um hieraus das Poisson'sche Verhältniss zu berechnen, muss man 1. die relativen Abstände des Ringcentrums und des Drahtcentrums von der Drehaxe des Interferenzapparates, 2. das angebrachte Gewicht, 3. die relativen Abstände des Gewichtes und des Drahtes von der Drehaxe des Hebelarmes, 4. die Dicke des Drahtes und 5. die Längsdehnung des Drahtes kennen. Die Bestimmung der erstgenannten ist schon oben

beschrieben worden. Das Gewicht und die Waagschale wurden direct gewogen und ebenso die erforderlichen Abstände von der Drehaxe des Hebelarmes direct mit einem Millimetermaassstab gemessen. Die Dicke des Drahtes wurde durch einen Dickenmesser sechsmal an verschiedenen Stellen gemessen und der Mittelwert genommen. Die Bestimmung der Längsdehnung ist schon vorher beschrieben worden.

7. Resultate der Beobachtungen über Längsdilatation und Quercontraction.

Aus diesen Versuchen und den p. 477 beschriebenen über Längsdehnung sind folgende Resultate erzielt worden:

Substanz	Dicke des Drahtes	Längs-dilatation für 1 kg	Quer-contraction für 1 kg	Poisson'sches Verhältniss	Mittelwerte des Poisson'schen Verhältnisses
Stahl	0,685 mm	$123,2 \times 10^{-6}$	$33,96 \times 10^{-6}$	0,276	0,2755
"	1,405	$28,9 \times 10^{-6}$	$7,96 \times 10^{-6}$	0,275	
Kupfer	1,390	$55,2 \times 10^{-6}$	$18,60 \times 10^{-6}$	0,337	0,341
"	1,728	$36,0 \times 10^{-6}$	$12,42 \times 10^{-6}$	0,345	
Eisen	0,948 mm	$68,4 \times 10^{-6}$	$20,13 \times 10^{-6}$	0,294	0,288
"	1,578	$24,7 \times 10^{-6}$	$6,94 \times 10^{-6}$	0,282	
Nickel	0,963	$63,3 \times 10^{-6}$	$23,71 \times 10^{-6}$	0,375	
"	1,490	$26,9 \times 10^{-6}$	$7,29 \times 10^{-6}$	0,271	
Messing (gelb)	0,787	$183,6 \times 10^{-6}$	$60,22 \times 10^{-6}$	0,328	0,331
"	1,498	$48,6 \times 10^{-6}$	$16,21 \times 10^{-6}$	0,334	
Messing (rot)	0,996	$105,7 \times 10^{-6}$	$31,72 \times 10^{-6}$	0,300	
Nickelin	0,978	$78,0 \times 10^{-6}$	$31,65 \times 10^{-6}$	0,406	
"	1,397	$40,5 \times 10^{-6}$	$16,15 \times 10^{-6}$	0,399	0,403
Neusilber	1,005	$78,8 \times 10^{-6}$	$24,70 \times 10^{-6}$	0,313	
"	1,592	$40,2 \times 10^{-6}$	$17,24 \times 10^{-6}$	0,429	
Bronze	0,902	$113,2 \times 10^{-6}$	$46,85 \times 10^{-6}$	0,414	

Die beiden Nickeldrähte waren nicht gleichartig, was eine Erklärung für die nicht übereinstimmenden Werte des Poisson'schen Verhältnisses giebt. Ich habe einen ziemlichen Unterschied in dem specifischen Gewicht der beiden Nickeldrähte gefunden; dasselbe gilt auch von Neusilber, wo die Nichtüber-

einstimmung durch eine wahrscheinliche Verschiedenheit der Legierungen erklärt werden könnte. Ich habe die Beobachtungen natürlich mehrere Male wiederholt, aber immer ähnliche Resultate bekommen.

8. Resultate der Torsionsversuche.

Die bei den Beobachtungen erhaltenen Resultate sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt, deren Einrichtung wohl keiner Erklärung bedarf.

Substanz	Durchmesser des Drahtes	Belastung	Belastung pro mm	Relativer Torsionswiderstand $\frac{m}{m_0}$			Ungefährer absoluter Wert m_0 des Torsions- widerstandes
				ohne Berücksichtigung der Deformation	unter Berücksichtigung der Deformation		
					beob.	ber. nach (6)	
	mm	kg	kg				
Stahl	0,685	2	5,43	1,00570	1,00364	1,00362	$7,520 \times 10^{11}$
		5	13,57	1,00348	1,00219	1,00243	
		10	27,14	1,00000	1,00000	0,99979	
		15	40,71	0,99478	0,99608	0,99633	
		18	48,85	0,99178	0,99386	0,99386	
Stahl	1,000	10	12,73	1,00357	1,00242	1,00247	$8,077 \times 10^{11}$
		15	19,10	1,00178	1,00120	1,00129	
		20	25,46	1,00000	1,00000	0,99997	
		24,7	31,45	0,99843	0,99897	0,99886	
		29,4	37,43	0,99663	0,99772	0,99780	
Stahl	1,405	10	6,45	1,00194	1,00134	1,00142	$8,030 \times 10^{11}$
		15	9,68	1,00089	1,00059	1,00059	
		20	12,91	1,00000	1,00000	0,99993	
		24,7	15,95	0,99920	0,99949	0,99940	
		29,4	18,98	0,99837	0,99894	0,99902	
Eisen	0,883	3	4,90	1,00298	1,00173	1,00213	$5,671 \times 10^{11}$
		6	9,80	1,00248	1,00185	1,00131	
		9	14,70	1,00000	1,00000	0,99983	
		12	19,60	0,99708	0,99771	0,99820	
		15	24,49	0,99478	0,99600	0,99589	
Eisen	1,190	5	4,50	1,00202	1,00126	1,00126	$6,372 \times 10^{11}$
		10	8,99	1,00106	1,00058	1,00065	
		15	13,49	1,00000	1,00000	0,99998	
		20	17,99	0,99885	0,99932	0,99928	
		25	22,48	0,99764	0,99859	0,99856	

Substanz	Durchmesser des Drahtes	Belastung	Belastung pro mm ²	Relativer Torsionswiderstand $\frac{m}{m_0}$			Ungefährer absoluter Wert m_0 des Torsions- widerstandes
				ohne Berücksichtigung der Deformation	unter Berücksichtigung der Deformation		
					beob.	ber. nach (6)	
Eisen	mm 1,578	kg 10	kg 5,11	1,00141	1,00088	1,00090	$6,732 \times 10^{11}$
		15	7,67	1,00090	1,00063	1,00057	
		20	10,23	1,00000	1,00000	1,00026	
		24,7	12,63	1,00017	1,00042	0,99996	
		29,4	15,03	0,99914	0,99963	0,99971	
Kupfer	0,947	2	2,84	1,00608	1,00490	1,00501	$7,057 \times 10^{11}$
		4	5,68	1,00459	1,00400	1,00340	
		6	8,51	1,00000	1,00000	1,00060	
		8	11,35	0,99600	0,99659	0,99651	
		10	14,19	0,98939	0,99058	0,99072	
Kupfer	1,390	2	1,32	1,00101	0,99997	1,00000	$6,139 \times 10^{11}$
		5	3,30	1,00092	1,00027	1,00030	
		10	6,59	1,00000	1,00000	0,99986	
		15	9,89	0,99738	0,99803	0,99824	
		18	11,86	0,99586	0,99680	0,99669	
Kupfer	1,728	10	4,24	1,00338	1,00252	1,00122	$5,342 \times 10^{11}$
		15	6,37	1,00120	1,00077	1,00120	
		20	8,49	1,00000	1,00000	1,00050	
		25	10,61	0,99711	0,99753	0,99891	
		30	12,73	0,99674	0,99760	0,99651	
Nickel	0,818	2	3,81	0,99756	0,99581	0,99504	$8,952 \times 10^{11}$
		5	9,52	0,99694	0,99585	0,99610	
		10	19,04	1,00000	1,00000	1,00000	
		15	28,56	1,00626	1,00735	1,00644	
		18	34,29	1,00880	1,01054	1,01130	
Nickel	0,963	2	2,74	0,99640	0,99513	0,99489	$9,026 \times 10^{11}$
		5	6,86	0,99728	0,99649	0,99685	
		10	13,73	1,00000	1,00000	1,00004	
		15	20,59	1,00273	1,00352	1,00309	
		18	24,71	1,00337	1,00463	1,00487	
Nickel	1,490	10	5,73	0,99790	0,99734	0,99688	$5,518 \times 10^{11}$
		15	8,60	0,99850	0,99822	0,99862	
		20	11,47	1,00000	1,00000	1,00014	
		25	14,34	1,00106	1,00134	1,00147	
		30	17,20	1,00222	1,00278	1,00258	

Substanz	Durchmesser des Drahtes	Belastung	Belastung pro mm ²	Relativer Torsionswiderstand $\frac{m}{m_0}$			Ungefährer absoluter Wert m_0 des Torsions- widerstandes
				ohne Berück- sichtigung der Deformation	unter Berücksichtigung der Deformation		
					beob.	ber. nach (6)	
Messing	mm 0,787	kg 2	kg 4,11	1,00633	1,00384	1,00417	3,688 × 10 ¹¹
		5	10,28	1,00294	1,00169	1,00173	
		8	16,44	1,00000	1,00000	0,99917	
		11	22,61	0,99448	0,99573	0,99641	
		14	28,77	0,99107	0,99353	0,99343	
Messing	0,943	2	2,87	1,00202	1,00110	1,00111	3,855 × 10 ¹¹
		4	5,74	1,00026	1,99980	1,00050	
		6	8,61	1,00000	1,00000	0,99993	
		8	11,48	0,99901	0,99948	0,99933	
Messing	1,493	10	14,35	0,99759	0,99852	0,99870	3,804 × 10 ¹¹
		7	3,97	1,00148	1,00057	1,00058	
		10	5,67	1,00094	1,00037	1,00038	
		15	8,51	1,00000	1,00000	0,99999	
		20	11,35	0,99894	0,99951	0,99953	
Nickelin	0,795	22,8	12,94	0,99838	0,99926	0,99925	5,921 × 10 ¹¹
		2	4,03	1,01191	1,00946	1,00943	
		5	10,07	1,00712	1,00559	1,00571	
		10	20,14	1,00000	1,00000	0,99987	
		15	30,21	0,99290	0,99444	0,99449	
Nickelin	0,978	18	36,24	0,98900	0,99146	0,99147	6,166 × 10 ¹¹
		2	2,66	1,00574	1,00410	1,00426	
		5	6,65	1,00402	1,00300	1,00270	
		10	13,31	1,00000	1,00000	0,99998	
		15	19,96	0,99574	0,99677	0,99711	
Nickelin	1,397	18	23,96	0,99391	0,99554	0,99531	6,573 × 10 ¹¹
		10	6,52	1,00249	1,00144	1,00140	
		15	9,78	1,00116	1,00063	1,00071	
		20	13,05	1,00000	1,00000	1,00011	
		25	16,31	0,99937	0,99989	0,99961	
Neusilber	1,005	30	19,57	0,99802	0,99908	0,99921	7,451 × 10 ¹¹
		2	2,53	1,00559	1,00417	1,00417	
		5	6,33	1,00360	1,00271	1,00270	
		10	12,67	1,00000	1,00000	0,99999	
		15	19,00	0,99601	0,99690	0,99694	
		18	22,81	0,99358	0,99500	0,99496	

Substanz	Durchmesser des Drahtes	Belastung	Belastung pro mm ²	Relativer Torsionswiderstand $\frac{m}{m_0}$			Ungefährer absoluter Wert m_0 des Torsions- widerstandes
				ohne Berücksichtigung der Deformation	unter Berücksichtigung der Deformation		
					beob.	ber. nach (6)	
Neusilber	1,592	kg	kg				$6,584 \times 10^{11}$
		10	5,02	1,001604	1,000526	1,000522	
		15	7,53	1,000772	1,000232	1,000245	
		20	10,05	1,000000	1,000000	0,999986	
		25	12,56	0,999196	0,999736	0,999742	
		30	15,07	0,998438	0,999516	0,999515	
Messing (rot)	0,996	2	2,57	1,00459	1,00318	1,00320	$3,804 \times 10^{11}$
		5	6,42	1,00326	1,00280	1,00310	
		10	12,84	1,00000	1,00000	0,99943	
		15	19,26	0,98983	0,99126	0,99140	
		18	23,11	0,98190	0,98445	0,98460	
Bronze	0,902	2	2,82	1,00571	1,00451	1,00437	$9,077 \times 10^{11}$
		4	5,65	1,00223	1,00158	1,00196	
		6	8,47	1,00000	1,00000	0,99972	
		8	11,30	0,99702	0,99762	0,99762	
		10	14,12	0,99445	0,99565	0,99570	

Nach den erweiterten Elasticitätsformeln von Voigt¹⁾ und von Finger²⁾ gelten für den Torsionswiderstand Gesetze von der Gestalt

$$m = \alpha + \beta P + \gamma P^2, (6),$$

worin P das spannende Gewicht, α , β , γ aber Constanten bezeichnen. Ich habe die den benutzten Drähten nach meinen Beobachtungen entsprechenden Parameter β und γ bestimmt und dabei als Einheit der Spannung ein Kilogrammgewicht pro Quadratmillimeter genommen. Die 7. Columnne der obigen Tabelle enthält die mit ihnen berechneten Werte m/m_0 .

1) W. Voigt, Wied. Ann. 52. p. 536. 1894.

2) J. Finger, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 103. p. 163. 1894.

Substanz	Dicke des Drahtes	β	γ
Stahl	0,685 mm	-0,000104	-0,00000222
	1,000	-0,000218	+0,00000061
	1,405	-0,000367	+0,00000698
Eisen	0,883 mm	+0,000011	-0,00001050
	1,190	-0,000127	-0,00000070
	1,578	-0,000149	+0,00000134
Kupfer	0,947	+0,000168	-0,0000843
	1,390	+0,000406	-0,0000545
	1,728	+0,001042	-0,0000895
Nickel	0,818	+0,000022	+0,0000135
	0,963	+0,000493	-0,0000013
	1,490	+0,000788	-0,0000126
Messing	0,787	-0,000339	-0,00000275
	0,943	-0,000360	-0,00000999
	1,498	-0,000083	-0,00000383
Nickelin	0,795	-0,000639	+0,00000220
	0,978	-0,000371	-0,00000175
	1,397	-0,000285	+0,00000449
Neusilber	1,005	-0,000305	-0,00000407
	1,592	-0,000126	+0,00000131
Messing (rot)	0,996	+0,000439	-0,0000524
Bronze	0,902	-0,001961	+0,0000397

9. Genauigkeit der Resultate.

Die beobachteten Grössen, aus denen Θ_0 zu bestimmen ist, sind die Zeitpunkte der einzelnen Coincidenzen und die Schwingungsamplituden der Scheibe. Ich schätze den mittleren Fehler der ersteren auf 0,2—0,4 sec, denjenigen der letzteren auf 1°. Dies giebt einen Fehler von Θ_0 , der zwischen 0,04 und 0,07 sec liegt.

Bezeichnen wir den Fehler von Θ_0 mit F , so ist der Fehler von h in (1) gleich $F/\mu S$. Der Wert von S ist

$$S = \frac{h \nu \pm 1}{h \mu} \cdot T;$$

sein Fehler ist also

$$\frac{F}{\mu S} \cdot \frac{\partial S}{\partial h} \quad \text{oder} \quad \frac{F}{\mu S} \left[\frac{h \mu \cdot \nu - (h \nu \pm 1) \cdot \mu}{(h \mu)^2} \right] T,$$

wenn wir den Fehler von T nicht beachten, da es sich nur um relative Werte von S handelt, die alle aus demselben Wert von T berechnet sind. Der letzte Ausdruck reducirt sich auf

$$\frac{F}{h\mu} \left[\frac{\nu T}{\mu S} - 1 \right];$$

die relativen Werte von S in Bezug auf einen Anfangswert S_a haben also den Fehler

$$\frac{F}{h\mu S_a} \left[\frac{\nu T}{\mu S} - 1 \right] = \frac{F}{\Theta_0} \left(\frac{\nu T}{\mu S} - 1 \right).$$

Dies giebt für den mittleren Fehler von S für die verschiedenen F , Θ_0 , νT und μS Werte, die zwischen 0,000005 und 0,000040 liegen; der wahrscheinliche Fehler beträgt $\frac{2}{3}$ hiervon, liegt also zwischen 0,000003 und 0,000027. Die relativen Torsionswiderstände bestimmen sich aus den Quadraten der Schwindungsdauern und sollten also Fehler zwischen 0,000006 und 0,000054 haben. Die Fehler von l/l_0 und r_0/r kommen hierneben nicht in Betracht.

10. Discussion der Resultate.

Die aus meinen Beobachtungen abgeleiteten Werte von β und γ zeigen eine grosse Abhängigkeit von dem Querschnitt des Drahtes. Dieser Umstand muss daher rühren, dass die Drähte nicht homogen sind. Es ist eine bekannte Thatsache, dass die Oberflächen von Metallen bei der Bearbeitung eine andere Beschaffenheit erhalten, wie das Innere. Die Oberfläche muss ausserdem anders sein, wie das Innere, weil sie Wasser und Luftgase absorbiert, und weil chemische Verunreinigungen vorkommen. Ich habe aber die letzte Ursache so weit wie möglich vermieden, indem ich die Oberfläche des Drahtes nach dem Ausglühen mit Schmirgelpapier reinigte. Da die Oberflächenschicht einen grösseren Einfluss auf einen dünnen Draht, wie auf einen dicken haben muss, so ist zu erwarten, dass sich die verschieden dicken Drähte in Betreff der Elasticität verschieden verhalten. Die Drähte, mit denen ich gearbeitet habe, ergaben verschiedene Werte des Torsionswiderstandes für dieselbe Substanz und verschiedene Drahtdicken. Es ist also zu erwarten, dass β und γ auch von der Drahtdicke beeinflusst werden, was sich in der That gezeigt hat.

Die gefundenen Werte von β und γ sind also nicht als allgemein gültige Constante für die betreffende Substanz zu betrachten, sondern nur als Constante, die das Verhalten des betreffenden Drahtes angeben. Wenn die Dicke des Drahtes grösser wird, nähern sie sich immer mehr den allgemeinen Constanten. Wir können also durch Betrachtung des Verlaufes der oben angegebenen β und γ bei wachsender Drahtdicke gewisse Schlüsse über die allgemeinen Constanten ziehen, die qualitativ (was das Vorzeichen angeht) ziemlich vertrauenswürdig sein dürften. Quantitative Annäherungen der Werte von β und γ kann man aus meinen Beobachtungen kaum ziehen, da die Reihe verschiedener Drahtdicken immerhin eine kurze war. Es ergibt sich:

Stahl	β negativ	γ positiv
Eisen	β „	γ „
Kupfer	β positiv	γ negativ
Nickel	β „	γ „
Messing	β negativ	γ „
Nickelin	β „	γ positiv
Neusilber	β „	γ „
Rotes Messing	β positiv	γ negativ
Bronze	β negativ	γ positiv

Die Abhängigkeit der Torsionselasticität von der Längsdehnung kann nach den jetzt bekannten Methoden nur innerhalb ziemlich enger Grenzen untersucht werden. Wir dürfen auf der einen Seite die Elasticitätsgrenze bei unserer Längsdehnung nicht überschreiten; auf der anderen Seite würden wir Schwierigkeiten begegnen, wenn wir negative Dehnungen anbringen wollten, denn wir würden mit dicken Stäben operiren müssen, bei denen eine gleichmässige Kraftverteilung auf den Bodenflächen fast unerreichbar ist. Zwischen diesen Grenzen zeigt meine Untersuchung, dass das Gesetz $m = \alpha + \beta P + \gamma P^2$ innerhalb der Fehlergrenzen gültig ist, und dass die verschiedenen Metalle sich folgendermaassen verhalten:

Stahl hat ein negatives β und ein positives γ . Doch ist γ so klein, dass β allein für das Verhalten von Stahl maassgebend ist. Sein Torsionswiderstand nimmt also mit wachsender Spannung ab.

Eisen hat auch ein negatives β und ein sehr kleines positives γ , sodass der Torsionswiderstand bei ihm ebenso, wie bei Stahl, mit wachsender Spannung abnimmt.

Kupfer hat ein positives β und negatives γ , welch letzteres gross genug ist, das Verhalten des Kupfers schon bei ziemlich geringen Spannungen zu beherrschen. Der Torsionswiderstand des Kupfers nimmt mit wachsender Spannung zuerst ein wenig zu, alsdann ziemlich rasch ab. Die Curve des Torsionswiderstandes besitzt ein Maximum bei ungefähr 6 kg Gewicht pro Quadratmillimeter.

Nickel hat ein positives β und ein sehr kleines negatives γ . Sein Torsionswiderstand nimmt also bei wachsender Spannung zu, wie es auch Cantone und Michelucci¹⁾ gefunden haben. Nickel ist die einzige von mir untersuchte Substanz, die diese Eigenschaft bis zur Elasticitätsgrenze zeigt.

Für *Messing* scheint β sehr nahe bei Null zu liegen; γ hat aber einen negativen Wert, sodass der Torsionswiderstand bei wachsender Spannung abnimmt. Dies bezieht sich auf eine gelbe, wenig Kupfer enthaltende Legirung. Ich habe auch einen einzigen Draht aus einem stark kupferhaltigen Messing untersucht, und gefunden, dass er sich ganz wie ein Kupferdraht verhält.

Nickelin hat ein negatives β und ein sehr kleines positives γ , sodass sein Torsionswiderstand mit wachsender Spannung abnimmt.

Bei *Neusilber* ist β negativ, γ positiv und klein, der Torsionswiderstand nimmt also, jedenfalls bei kleineren Spannungen, mit wachsender Spannung ab.

Für *Bronze* habe ich nur einen einzigen Draht untersucht, sodass kein Schluss über die allgemeinen Constanten für Bronze zu ziehen ist. Der Torsionswiderstand des einzigen Drahtes nahm mit wachsender Spannung ab.

11. Zusammenfassung der Resultate.

Diese Untersuchung zeigt also:

1. dass eine Abhängigkeit der Torsionsconstante, bez. des specifischen Torsionswiderstandes m von der Spannung, die unter Berücksichtigung der höheren Glieder in dem elastischen Potential zu erwarten ist, wirklich vorkommt;

1) M. Cantone u. E. Michelucci, Rend. Linc. (5) 6. p. 191 bis 198. 1897.

2. dass diese Abhängigkeit innerhalb der Fehlergrenzen der Experimente dem Gesetze $m = \alpha + \beta P + \gamma P^2$ folgt, wo m die Constante der Torsionselasticität, P die Spannung und α, β, γ Constanten sind;

3. dass wegen der Inhomogenität der Substanz der Drähte keine quantitativen Schlüsse über für die Substanz allgemein gültige Constanten α, β, γ aus Beobachtungen eines einzigen dünnen Drahtes zu ziehen sind, die dabei erhaltenen Werte von α, β, γ vielmehr nur das Verhalten des betreffenden Drahtes darstellen;

4. dass es aber trotzdem möglich ist, durch Beobachtungen einer Reihe verschieden dicker Drähte von derselben Substanz den Einfluss der Inhomogenität näherungsweise zu eliminiren und eine ungefähre Kenntniss der allgemeinen Constanten α, β, γ zu erlangen. Es zeigt sich so, dass der Torsionswiderstand bei Stahl, Eisen, Nickelin, Neusilber und nicht zu kupferhaltigem Messing mit wachsender Spannung abnimmt; dass er bei Kupfer erst zunimmt und nachher abnimmt, dass er bei Nickel stets zunimmt. Dies gilt zwischen der Spannung Null und der Elasticitätsgrenze.

Göttingen 1900.

(Eingegangen 9. October 1900.)

**7. Methode der Querströme
und die Leitfähigkeit in durchströmten Gasen;
von J. Stark.**

Bereits in früheren Arbeiten¹⁾ habe ich Versuche über Querleitung in durchströmten Gasen angestellt, um über die räumliche Verteilung der Leitfähigkeit Aufschluss zu erhalten. Da mir eine genaue Untersuchung der gewöhnlichen leuchtenden Entladung in verdünnten Gasen in dieser Richtung wichtig erschien, so stellte ich im vergangenen Winter entsprechende orientierende Versuche an und gab die Anregung zu weiteren Versuchen mit einem vorteilhafteren Verfahren. Da meiner Anregung nicht entsprochen wurde, wollte ich im bevorstehenden Winter die geplante Untersuchung selbst in die Hand nehmen; vorläufige Mitteilungen²⁾ über meine Versuche und gewisse theoretische Ueberlegungen liess ich in der „Physikalischen Zeitschrift“ erscheinen. Nun ist unterdessen von H. A. Wilson³⁾ eine Untersuchung von der beabsichtigten Art erschienen. Dies veranlasst mich, meine damaligen Resultate und die theoretischen Ueberlegungen, die ich daran knüpfte, ausführlich und ergänzt mitzuteilen.

I. Methode der Querströme.

1. *Zweck und Wesen der Methode.* — In linearen Leitern, die durchaus gleichmässig beschaffen sind, wird der Widerstand r zwischen zwei Querschnitten direct oder indirect aus der Grösse e/i oder $\partial e/\partial i$ (e Spannungsdifferenz, i Stromstärke) bestimmt; aus dem Gesamtwiderstand zwischen den

1) J. Stark, Wied. Ann. 68. p. 942. 1899; Ann. d. Phys. 2. p. 64. 1900.

2) J. Stark, Physikal. Zeitschr. 1. p. 431 u. 439. 1900.

3) H. A. Wilson, Phil. Mag. (5) 49. p. 514. 1900.

zwei Querschnitten lässt sich dann unter Berücksichtigung der Dimensionen des Leiters (q Querschnitt, l Länge) die spezifische Leitfähigkeit berechnen ($r = [l/\lambda \cdot q]$).

Ist in einem Leiter die spezifische Leitfähigkeit räumlich variabel, treten aber keine inneren elektromotorischen Kräfte von zu berücksichtigender Grösse in ihm auf, so lässt sich auch dann noch der Gesamtwiderstand zwischen zwei Querschnitten

$$\left(r = \frac{1}{q} \int_0^l \frac{dl}{\lambda} \right)$$

nach den üblichen Methoden bestimmen; aber aus ihm lässt sich nicht mehr eine spezifische Leitfähigkeit berechnen, da diese ja variabel ist.

Wenn in einem durchströmten Leiter aus irgend einem Grund unabhängig von der äusseren elektromotorischen Kraft Spannungsdifferenzen von unbekannter Grösse auftreten, dann darf der Widerstand zwischen zwei Querschnitten nicht mehr aus e/i oder $\partial e/\partial l$ bestimmt, noch die Leitfähigkeit umgekehrt proportional dem Gefälle gesetzt werden.

Um nun für den Fall, dass die Leitfähigkeit räumlich variabel ist, insbesondere infolge des Durchganges eines Stromes, und für den Fall, dass innere Spannungsdifferenzen auftreten, Leitfähigkeiten an verschiedenen Stellen eines durchströmten flüssigen oder flächenhaften, festen Leiters zu vergleichen, kann man sich der Methode der Querströme bedienen. Diese besteht wesentlich in Folgendem.

Man bringt an zwei Punkte einer Niveaufläche des durchfliessenden Stromes, an denen man die Leitfähigkeit kennen lernen will, zwei punktförmige Elektroden; diese verbindet man durch eine Gleichstrom- (oder Wechselstrom-)quelle und ein empfindliches Galvanometer. Die verschiedenen Stromstärken, die man für verschiedene Niveauflächen am Galvanometer abliest, lassen dann die Leitfähigkeiten miteinander vergleichen, die an den entsprechenden Stellen des Leiters herrschen.

2. *Theorie der Methode.* — Ein durchströmter Leiter soll cylindrische Form haben; die Stromlinien laufen dann parallel seiner Axe, und die Niveauflächen sind Querschnitte, die auf

der Axe senkrecht stehen. An zwei Punkte einer Niveaufläche in einem Axenschnitt des Cylinders sollen in gleichen Abständen von der Axe zwei punktförmige Elektroden gebracht werden; diesen sei eine elektromotorische Kraft zugeführt, die unabhängig ist von derjenigen, die längs des Cylinders wirkt.

Im stationären Zustand wird die Verteilung des Potentials Φ in dem Cylinder unter dem Einfluss der an seinen Enden wirkenden Kraft gegeben durch die Gleichungen

$$\Delta \Phi = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$$

(n innere Normale an dem Cylindermantel). Da die leitenden Querelektroden punktförmig sein sollen, gelten jene Gleichungen auch noch bei deren Anwesenheit.

Wirkt an den Querelektroden eine elektromotorische Kraft, so wird die von dieser im Innern des Cylinders hervorgebrachte Potentialverteilung durch die Gleichungen

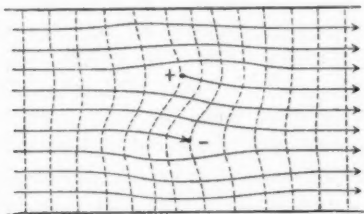
$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$$

gegeben.

Sind nun die Endflächen des Cylinders den Querelektroden nicht sehr nahe und wirken gleichzeitig die elektromotorische Kraft des Längs- und diejenige des Querstromes, so wird die Potentialverteilung in der Umgebung der Querelektroden durch die Gleichungen

$$\Delta (\Phi + \varphi) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial (\Phi + \varphi)}{\partial n} = 0$$

dargestellt. Ihr Typus wird gegeben durch die nachstehende Figur. In dieser bedeuten die ausgezogenen Linien Strom-



linien, die gestrichelten Niveaulinien. Wie man sieht, sind an den Querelektroden die Stromlinien und Niveaulinien deformiert.

Aus der einen Querelektrode selbst treten Stromlinien heraus und laufen nach der Kathode des Cylinders und umgekehrt dringen in die andere Querelektrode Stromlinien ein, die von der Cylinderanode herkommen. Die Niveaufläche, die durch die Querelektroden geht und eben ist, wenn an diesen die elektromotorische Kraft Null ist, wird doppelt gewölbt, wenn diese von Null verschieden ist.

Wir setzen zunächst voraus, dass bei Gegenwart und Abwesenheit des Querstromes die Grösse und Verteilung der Leitfähigkeit in der Nähe der Querelektroden dieselbe sei. Das Stromliniensystem, das sich unter dieser Voraussetzung ergibt, ist dann die Resultante aus dem System des Querstromes für sich und demjenigen des Längsstromes für sich gemäss den obigen Gleichungen. Die Stärke des Querstromes ist darum bei Gegenwart des Längsstromes ebenso gross wie bei dessen Abwesenheit, sie ist unter den gemachten Voraussetzungen unabhängig von dem Gefälle des Längsstromes; der Widerstand zwischen den Querelektroden, der sich aus deren Spannungsdifferenz und der Stärke des Querstromes bei Abwesenheit von Polarisation berechnen lässt, ist gerade so gross, wie derjenige, der sich für die betreffende Partie des Leiters bei Abwesenheit des Längsstromes ergäbe, vorausgesetzt nur, dass die Grösse und die Verteilung der Leitfähigkeit unverändert bliebe.

Bringt man also die Querelektroden auf verschiedene Niveauflächen des Längsstromes im Cylinder, lässt alle übrigen Verhältnisse ungeändert und bestimmt für die betreffenden Stellen die Stärken des Querstromes, so lassen sich die an diesen Stellen herrschenden Leitfähigkeiten mit dem Maass der Stromstärken miteinander vergleichen.

Ist E die elektromotorische Kraft, i die Stärke des Querstromes, r sein äusserer Widerstand, w der für ihn in Betracht kommende Widerstand zwischen den Querelektroden, so gilt bei Vernachlässigung von Polarisation

$$iw = E - ir \quad \text{und} \quad w_1 : w_2 \dots = \frac{1}{\lambda_1} : \frac{1}{\lambda_2} \dots = \frac{E - i_1 r}{i_1} : \frac{E - i_2 r}{i_2} \dots$$

Bringt man in den Cylinder an Stelle des untersuchten Leiters einen anderen von bekannter Leitfähigkeit λ' und bestimmt

das nunmehr für den Querstrom geltende w' , so ist die Leitfähigkeit des ersten Leiters

$$\lambda = \frac{i' w'}{w}.$$

Die vorstehenden Betrachtungen und Folgerungen gelten auf Grund des Principes der Superposition der elektrischen Ströme auch noch für den Fall, dass im Cylinder innere elektromotorische Kräfte auftreten, wenn diese nur in der Richtung der Cylinderaxe wirken, also keine Spannungsdifferenz zwischen den Querelektroden hervorbringen. Sie gelten aber dann nicht mehr streng, wenn die zu untersuchende Leitfähigkeit von der Stromdichte abhängt. Dann ändert sich ihre Verteilung mit derjenigen der Stromlinien und ist darum bei einer Uebereinanderlagerung des Längs- und des Querstromes eine andere, als wenn nur die Linien des Längsstromes vorhanden sind. Dieser Umstand bewirkt zudem, dass bei der Uebereinanderlagerung infolge der Aenderung der Verteilung der Leitfähigkeit die Niveauflächen des Längsstromes für sich eine Deformation erfahren, sodass nicht mehr die Bedingung erfüllt ist, dass die Querelektroden auf einer Niveaufläche des Längsstromes zu liegen haben. Darum kann in dem Falle, dass die Leitfähigkeit eine Function der Stromdichte ist, die Methode der Querströme nur in erster Annäherung den Wert der Leitfähigkeit in der Nähe der Querelektroden liefern.

Wenn der Querstrom an seinen Elektroden Polarisation hervorbringt, so sind die obigen Formeln nicht mehr genau. Aber da nach unseren Erfahrungen die Polarisation mit der Stromstärke zunimmt, so dürfen wir immer noch schliessen, dass einer grösseren Querstromstärke eine grössere Leitfähigkeit an der untersuchten Stelle entspricht. Und wir können die Beobachtung der Querstromstärken an verschiedenen Stellen eines durchströmten Leiters wenigstens zur Orientirung über die räumliche Variation der Leitfähigkeit benutzen. Uebrigens kann man die störende Wirkung der Polarisation bei der Bestimmung der Leitfähigkeit mittels Querströme dadurch umgehen, dass man einen Wechselstrom anwendet; man wird sich dann am besten der Methode des Wheatstone'schen Vierecks bedienen, indem man die Querelektroden und das

zwischen ihnen liegende Leiterstück zu einer Seite des Vierecks macht.

3. *Praxis der Methode.* — Um die in den vorstehenden theoretischen Betrachtungen geforderten Verhältnisse soweit wie möglich zu verwirklichen und brauchbare Resultate zu erhalten, hat man bei der Anwendung der Methode folgendes zu beachten.

Der Abstand der Querelektroden soll im allgemeinen zwischen 0,5 und 2 cm liegen. Damit die Linien des Längsstromes eine möglichst geringe Deformation erleiden und die Leitfähigkeit durch die Gegenwart des Querstromes nicht geändert werde, soll dessen Stärke so klein sein, als überhaupt die Empfindlichkeit des Galvanometers bez. des Telefons und die Genauigkeit der Beobachtung zulassen.

Bei einem flächenhaften festen Leiter verwende man als Querelektroden Spitzen, die senkrecht aufzusetzen sind. In flüssige Leiter führe man sehr dünne isolirende Stifte ein, die als Seele einen Metalldraht enthalten, dessen Spitzen aus dem Isolator bis auf 1 mm frei als Querelektroden hervortreten.

Die Einstellung der Querelektroden auf eine Niveaufläche prüft man durch die Untersuchung, ob im Querstromkreis bei Ausschaltung seiner elektromotorischen Kraft die Stromstärke Null ist. Um den Einfluss einer nicht genauen Einstellung annähernd zu beseitigen, bestimme man die Stärke des Querstromes für seine zwei Richtungen und nehme daraus das Mittel.

Der Kreis des Querstromes und derjenige des Längsstromes haben sorgfältigst voneinander isolirt zu sein, abgesehen von ihrer Durchkreuzung an der Stelle der Querelektroden.

II. Querströme in durchströmten Gasen.

1. *Frühere Versuche und Resultate.* — W. Hittorf¹⁾ war der erste, der Versuche über Querleitung in verdünnten, durchströmten Gasen anstellte. Der Längsstrom wurde bei ihm von einer Hochspannungsbatterie geliefert; die Gassäule war

1) W. Hittorf, Wied. Ann. 7. p. 614. 1879.

ein Kreiscylinder; die Querelektroden, die senkrecht zu dessen Axe conaxial zu einander in das Gas tauchten, waren dünne Platindrähte. Hittorf stellte fest, dass schon eine kleine elektromotorische Kraft genügt, um einen Strom zwischen den Querelektroden zu unterhalten. Er begnügte sich in der Hauptsache mit dem Nachweis dieser Erscheinung und schloss aus ihr, dass ein durchströmtes Gas auch senkrecht zur Stromrichtung Leitfähigkeit besitze.

C. A. Mebius¹⁾ hat den Versuch Hittorf's unter Beibehaltung von dessen Methode (Hochspannungsbatterie, Querelektroden klein und nahe, kleine elektromotorische Kraft) mit dem gleichen Erfolg wiederholt. Um die Querleitung in verschiedenen Teilen der Entladung untersuchen zu können, richtete er die Kathode verschiebbar ein. Er fand folgendes: „Befanden sich die Sonden (Querelektroden) in der Nähe der Kathode in dem dunklen Kathodenraum, war der Ausschlag sehr klein, nur einige Scalenteile. An der negativen Glimmschicht nahm der Ausschlag bedeutend zu, und in dem Glimmlicht selbst betrug derselbe 500 Sct. oder mehr. In dem dunklen Raum zwischen dem negativen und positiven Licht war der Ausschlag etwas kleiner, aber jedenfalls ziemlich bedeutend, und im positiven Licht bekam man einen beinahe constanten Ausschlag von nahezu 50 Sct. Der Ausschlag ist natürlich von der Zahl der Elemente in der Bahn des Transversalstromes, sowie von der Stärke des Hauptstromes abhängig.“ Folgerungen aus seinen Beobachtungen zog Mebius nicht, er legte ihnen auch keinen Wert bei.

H. Hertz²⁾ fand, dass zwischen zwei nahen Elektroden eine (Bogen-)Entladung ausgelöst wird, wenn senkrecht dazu eine zweite Entladung mittels einer höheren Spannung erzwungen wird. Die Querelektroden waren bei ihm durch eine grössere Zahl von Elementen verbunden. Der Längsstrom wurde von einem Inductorium geliefert.

E. Wiedemann und H. Ebert³⁾ legten bei ihrer Unter-

1) C. A. Mebius, Wied. Ann. 59. p. 545. 1896.

2) H. Hertz, Wied. Ann. 19. p. 813. 1883.

3) E. Wiedemann u. H. Ebert, Wied. Ann. 35. p. 220. 1888.

suchung der Transversalleitung an die Längselektroden eine Influenzmaschine, an die Querelektroden ebenfalls eine Influenzmaschine oder eine Accumulatorenatterie von 600 Zellen. Sie fanden, dass die Querentladung durch die Längsentladung erleichtert werde. Sie behaupten¹⁾, dass „innerhalb einer in eine primäre Entladung eintauchenden mit einer Elektrizitätsquelle verbundenen Funkenstrecke, also in der elektroluminescirenden Luft, keine Leitung im gewöhnlichen Sinne stattfindet“. Nach ihnen kommt die Erleichterung der Querentladung dadurch zu stande, dass durch die primäre Entladung die zur secundären notwendige Spannung herabgesetzt werde. E. Wiedemann²⁾ spricht von der Querleitung bei kleiner elektromotorischer Kraft als von einem „Elektricitätsverlust durch Zerstreuung“.

Eine eigene hierher gehörige Gruppe bilden die Versuche von A. Schuster³⁾ und S. Arrhenius.⁴⁾ Beide wollten nicht eine Querleitung in einem durchströmten Gas untersuchen, sondern die Leitung in einem Gas, das nur mit einem anderen durchströmten communicirt. Sie glaubten dies dadurch zu erreichen, dass sie innerhalb des Entladegefässes, aber ausserhalb der sichtbaren Bahn einer Inductoriumentladung, einen Strom zwischen zwei Elektroden von einer kleinen elektromotorischen Kraft unterhalten liessen.

S. Arrhenius glaubte, dass das von ultravioletttem Lichte bestrahlte oder phosphorescirende Gas eine Art elektrolytischer Leitfähigkeit annehme. A. Schuster suchte die Erklärung seines Versuches darin, dass von der primären Entladebahn leitfähige Teilchen in den Gasraum diffundiren, in dem sich die secundären Elektroden befinden.

In Wirklichkeit sind zweifellos gleichzeitig beide Momente wirksam, ausserdem aber zweigen sich auch in das Gebiet der secundären Elektroden Teile der Hauptentladung ab und beeinflussen hier die Leitfähigkeit.

1) l. c. p. 233.

2) l. c. p. 256.

3) A. Schuster, Proc. Roy. Soc. 42. p. 375. 1887.

4) S. Arrhenius, Wied. Ann. 32. p. 545. 1887.

Endlich sind noch zwei hierher gehörige Versuche besonderer Art anzuführen. Man kann sich die Frage vorlegen, wie die Leitfähigkeit eines Gases, das unabhängig von elektrischen Kräften aus irgend einem Grunde leitfähig ist, dadurch verändert wird, dass es von einem elektrischen Strom durchflossen wird.

W. Giese¹⁾ sandte senkrecht zu einem Strom, der durch leitende Flammengase floss, einen zweiten und fand, dass dieser durch die Anwesenheit des ersten geschwächt wurde. Die Erklärung dieser Erscheinung vermutete er darin, dass die positiven und negativen Ionen, welche die Leitung vermitteln, bei Anwesenheit elektrischer Kräfte schneller als bei Abwesenheit wieder zu elektrisch neutralen Teilchen zusammentreten.

Als ich in dem verdünnten, erhitzten leitenden Gas einer Glühlampe zwischen zwei Metallelektroden einen Strom übergehen liess und senkrecht dazu einen zweiten, fand ich, dass der Querstrom vor der Anode stärker, vor der Kathode schwächer war, als wenn überhaupt kein Längsstrom floss.²⁾ In einer späteren Arbeit³⁾ erklärte ich diese Beobachtung damit, dass infolge der Verschiedenheit der Wanderungsgeschwindigkeiten der positiven und negativen Ionen an der Kathode eine Verminderung der leitfähigen Teilchen, an der Anode eine Vermehrung eintreten soll. Soweit sich diese Erklärung auf die Kathode bezieht, möchte ich sie beibehalten; die Erhöhung der Leitfähigkeit an der Anode möchte ich dagegen nicht auf die Verschiedenheit der Wanderungsgeschwindigkeiten zurückführen, sondern damit erklären, dass durch die im Längsstrom nach der Anode zu sich bewegenden negativen Teilchen infolge ihrer ionisirenden Wirkung die Leitfähigkeit erhöht werde.

2. *Neue Versuche.* — Wie eingangs bemerkt, stellte ich über die Querleitung durchströmter Gase neue Versuche an. Ich benutzte eine 30 cm lange, 3 cm weite cylindrische Röhre mit

1) W. Giese, Wied. Ann. 17. p. 253—256. 1882.

2) J. Stark, Wied. Ann. 68. p. 945. 1899.

3) J. Stark, Ann. d. Phys. 2. p. 62. 1900.

Scheibenelektroden aus Aluminium; senkrecht zu ihrer Axe waren in sie 5 Paare von Querelektroden eingeführt. Diese waren dünne Platindrähte mit Einschmelzglas bis auf 1 mm umhüllt, ihre Spitzen waren ungefähr 1 cm voneinander entfernt.

Die Querelektroden wurden verbunden durch eine Batterie von 5—10 Accumulatoren und ein empfindliches Galvanometer im Nebenschluss zu einem Rheostaten. Der ausserhalb der Röhre liegende Teil des Querstromes war von dem Längsstrom sorgfältig isolirt. Dieser, stetig für ein eingeschaltetes Telephon, wurde von einer Batterie von 2000 kleinen Accumulatoren geliefert.

Räumliche Variation der Stärke der Querströme.

Es zeigte sich zunächst, dass es schwer hält, die Querelektroden so zu stellen, dass durch sie kein Teil des Hauptstromes sich abzweigt, dass sie also genau auf einer Niveaufläche liegen. Es war dies in meinen Messungen nur bei einigen Elektrodenpaaren mit grosser Annäherung der Fall. Ferner dürfen die Querstromstärken verschiedener Elektrodenpaare nicht miteinander verglichen werden, da die Unterschiede in der Oberfläche und dem Abstand der Elektroden zu grossen Einfluss haben.

Um gleichwohl die Leitfähigkeiten von verschiedenen Stellen des durchströmten Gases miteinander vergleichen zu können, verfuhr ich folgendermaassen. Es wurde mit einem bestimmten Elektrodenpaar die Stärke des Querstromes, z. B. in einer leuchtenden positiven Schicht, bestimmt; dann wurde der Längsstrom umgekehrt und abermals mit demselben Elektrodenpaar, das aber nun zufällig in einer dunklen Schicht liegen mochte, die Stärke des Querstromes bestimmt.

Auf die vorstehende Weise wurden immer die Querstromstärken an je zwei Stellen der Entladung miteinander verglichen. Um sie an mehr Stellen miteinander in Beziehung setzen zu können, benutzte ich den Umstand, dass die Querstromstärke innerhalb der relativ langen, positiven Lichtsäule mit grosser Annäherung constant ist. So kam ich zu folgendem allgemeinen Resultat: *in den leuchtenden Räumen* (positive ungeschichtete Lichtsäule, positive leuchtende Schicht, negative

Glimmschicht) *ist die Stärke eines Querstromes immer grösser als in den unmittelbar benachbarten dunklen Räumen (dunkle, positive Schicht, dunkler Trennungsraum, dunkler Kathodenraum)¹⁾; im dunklen Kathodenraume ist sie am kleinsten, in der negativen Glimmschicht am grössten.*

Wie gesagt, wollte ich unter Benutzung der gemachten Erfahrungen eine Untersuchung der Querleitung mit verschiebbaren Elektroden ausführen lassen oder selbst in die Hand nehmen. Dieser Absicht ist nun H. A. Wilson²⁾ mit der bereits erwähnten, vor kurzem veröffentlichten Untersuchung von der geplanten Art zuvor gekommen. Er benutzte als Quelle für den Längsstrom ebenfalls eine Hochspannungsbatterie. Die elektromotorische Kraft des Querstromes war klein; die Querelektroden waren dünne, schmale Platinbleche; gegen sie liessen sich die Elektroden des Längsstromes verschieben.

Wilson's Resultate decken sich nun vollkommen mit den meinigen. Nach den Curven, die er von der Stärke des Querstromes an verschiedenen Stellen des Längsstromes giebt, ist diese am kleinsten im dunklen Kathodenraume, erreicht ein absolutes Maximum in der negativen Glimmschicht, fällt zu einem relativen Minimum in dem dunklen Trennungsraume und steigt in der positiven Lichtsäule wieder zu einem verflachten Maximum; bei deren Schichtung besitzt sie in den leuchtenden Partien relative Maxima, in den dunklen relative Minima.

Nur in einem Falle scheint eine Ausnahme von der oben angegebenen Regel vorzuliegen. Bei einer Curve, die Wilson giebt, ist das elektrische Leuchten auf eine dünne Schicht an der Anode und an der Kathode beschränkt und dazwischen liegt ein langer, dunkler Raum; die Stärke des Querstromes fällt in diesem Fall von der Kathode gegen die Anode zu sehr schnell zu einem relativen Minimum und erhebt sich dann wieder zu einem langgestreckten, verflachten relativen Maximum. Das ganze Aussehen der Entladung und der Umstand, dass sie Wilson bei ziemlich hoher Gasdichte erhielt, zeigen, dass

1) J. Stark, Physik. Zeitschr. 1. p. 433. 1900.

2) H. A. Wilson, Phil. Mag. (5) 49. p. 514—516. 1900.

man es hier mit der bei hohen Dichten auftretenden dunklen Entladung zu thun hat, in der das Gefälle in dem dunklen Raum an der Anode ein breites relatives Maximum, in seinem Ende an der Kathode ein relatives Minimum des Gefälles besitzt. Und ich habe bereits in einer früheren Arbeit¹⁾ darauf hingewiesen, dass man wahrscheinlich auch in diesem Falle längs dieses Maximums ein Strahlungsmaximum vor sich hat, das sich nur unserem Auge entzieht. Darum hat vermutlich auch in dieser scheinbaren Ausnahme die Stärke des Querstromes in dem „dunklen Strahlungsmaximum“ an der Anode ein relatives Maximum und in dem wirklich dunklen Trennungsraum zwischen der „dunklen positiven Lichtsäule“ und der dünnen Glimmschicht an der Kathode ein relatives Minimum.

Den Grund dafür, dass in den leuchtenden Räumen die Stärke des Querstromes grösser ist als in den dunklen, sieht Wilson darin, dass die von der Entladung erregte Strahlung an den Platinelektroden Ionisation bewirken soll. Ich vertrete, wie unten dargelegt ist, eine andere Ansicht.

Abhängigkeit der Querstromstärke von der Längsstromstärke.

Eine andere Frage bezüglich der Querleitung lässt sich mit feststehenden Querelektroden behandeln, das ist die Abhängigkeit der Stärke des Querstromes von derjenigen des Längsstromes. Ich habe diese im ungeschichteten positiven Licht in der angegebenen Weise untersucht, indem ich die Verhältnisse im Querstromkreis unverändert liess und die Stärke des Hauptstromes variierte. Ich fand folgendes. *Bleibt der Querschnitt der positiven Lichtsäule constant, so nimmt die Stärke des Querstromes proportional mit derjenigen des Längsstromes zu; und zwar kann sie dieser proportional gesetzt werden, da die Gerade, welche diese Beziehung darstellt, nahezu durch die Stärke Null des Längsstromes läuft. Statt Stärke des Längsstromes ist indessen besser Dichte zu setzen.*

Wie sehr die Stärke des Querstromes von der Dichte des Längsstromes an seinen Elektroden abhängt, fällt besonders

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 3. p. 239. 1900.

bei relativ hoher Dichte des Gases auf, bei welcher der Querschnitt der positiven Lichtsäule sich leicht ändert, ohne dass dies im gleichen Maasse von der Stromstärke gilt. Sowie in diesem Falle der Querschnitt zu- oder abnimmt, wächst oder fällt bedeutend die Stärke des Querstromes.

Ich habe die Abhängigkeit der Stärke des Querstromes von der Längsstromstärke auch im dunklen Trennungsraum untersucht. Hier nimmt jene ebenfalls zu, wenn diese wächst, aber zuerst beträchtlich schwächer, dann etwas stärker als in der positiven Lichtsäule. Dies mag sich daraus erklären, dass mit wachsender Stromstärke die Strahlen des negativen Glimmlichtes, in dem ja die Stärke des Querstromes am grössten ist, sich ausdehnen und bis zu den Querelektroden vordringen.

III. Die Leitfähigkeit durchströmter Gase.

1. *Allgemeines.* — Es befestigt sich mehr und mehr die Erkenntnis, dass in durchströmten Gasen einzelne positive und negative Teilchen vorhanden sind und durch ihre Bewegung unter dem Einfluss des Gefälles die elektrische Strömung darstellen. Diese Auffassung entspricht unserer Vorstellung von der Stromleitung in Elektrolyten. Wir sind berechtigt, wie bei diesen so bei durchströmten Gasen von einer Leitfähigkeit zu sprechen. Eine andere Frage ist freilich, wie weit dieser Begriff zur Analyse der elektrischen Strömung in Gasen praktischen Wert besitzt und wie er zu modificiren ist.

Die Leitfähigkeit ist ursprünglich als eine Grösse defnirt worden, welche dem Verhältnis von Stromstärke und Gefälle proportional ist. In der Ionentheorie hat die Leitfähigkeit die Bedeutung einer Geschwindigkeit erhalten. Dieser Auffassung liegt die Voraussetzung zu Grunde, dass die elektrischen Teilchen mit einer mittleren gleichförmigen Geschwindigkeit, die proportional der elektrischen Kraft ist und deren Richtung hat, fortbewegt werden und keine Beschleunigung erfahren. Diese Anschauung entspricht nun auch der Wirklichkeit bei den gewöhnlichen metallischen und elektrolytischen Leitern. Es fragt sich indes, ob jene Voraussetzung auch noch bei Gasen ausnahmslos zutrifft.

Zu dieser Frage ist folgendes zu bemerken. In vielen Fällen, insbesondere bei grösseren Dichten eines Gases erfolgt in diesem die elektrische Bewegung der Ionen mit grosser Annäherung gemäss jener Voraussetzung; ihre mittlere Geschwindigkeit ist also bei Abwesenheit innerer elektromotorischer Kräfte an den einzelnen Stellen proportional der wirkenden Kraft und hält deren Richtung ein. Dies gilt auch in der ungeschichteten positiven Lichtsäule. Indes scheint schon bei höheren Dichten in der Nähe der Kathode, bei geringen Dichten in allen Teilen der Entladung jene Annahme nicht mehr zutreffend zu sein.¹⁾ Hier kann, besonders bei starken Kräften, die Geschwindigkeit der Ionen abhängig sein von der Kraft in vorausgehenden Querschnitten, sodass dann die Geschwindigkeiten an den einzelnen Stellen nicht mehr proportional den dort herrschenden Kräften sind und auch deren Richtung nicht mehr genau einhalten. Ich habe in einer früheren Arbeit²⁾ diese Erscheinung mit Ionenschuss bezeichnet. Da wo dieser auftritt, ist die Grösse Leitfähigkeit jedenfalls nicht mehr ausreichend zu einer genauen Analyse und Darstellung des elektrischen Vorganges; hier kann sie nur zu einer ersten Annäherung benutzt werden oder nur zu einer Charakteristik des Ionisationszustandes des durchströmten Gases dienen.

Es scheint, dass der nächste Fortschritt in der Erkenntnis des elektrischen Ausgleiches in Gasen in dieser Richtung erfolgen und zu einer Erweiterung der Ionentheorie führen wird. In dieser Abhandlung kann indes nicht auf den Ionenschuss eingegangen werden; hier soll die Leitfähigkeit durchströmter Gase behandelt werden, insoweit sie zu einer ersten Annäherung in der Auffassung der elektrischen Leitung in Gasen dient.

Machen wir uns auf Grund der Ionentheorie der elektrolytischen Leitung noch klarer, was wir unter der elektrischen Leitfähigkeit von Gasen zu verstehen haben.

Wie bei Elektrolyten soll auch bei Gasen die Leitfähigkeit λ aus zwei Teilen zusammengesetzt werden, einem Teil π ,

1) Vgl. J. Stark, Physik. Zeitschr. 1. p. 431. 1900.

2) J. Stark, Physik. Zeitschr. 1. p. 440. 1900.

welcher den positiven Teilchen oder Ionen, und einem zweiten v , welcher den negativen entspricht. Es sei $\lambda = \pi + v$. π sei proportional der Geschwindigkeit u , welche ein positives Ion unter der Kraft Eins annimmt, ferner proportional der Anzahl p der positiven Ionen in der Volumeneinheit. Wenn ε die Ladung des Ions bezeichnet, so ist (elektromagnetisches Maasssystem)

$$\pi = p \cdot \varepsilon \cdot u.$$

Ist v die absolute Beweglichkeit des negativen Ions, n die spezifische negative Ionenzahl, so gilt analog

$$v = n \cdot \varepsilon \cdot v.$$

Bei Elektrolyten ist nun $p = n = N$, d. h. es sind in jeder Volumeneinheit gleich viel positive und negative Ionen enthalten; demgemäss gilt für sie

$$\lambda = N \cdot \varepsilon \cdot (u + v).$$

Bei Gasen soll indes die Möglichkeit zugelassen werden, dass $p \geq n$ ist, dass also im Innern eines durchströmten Gases wahre Ladungen auftreten; für sie gilt darum allgemein

$$\lambda = \varepsilon(p \cdot u + n \cdot v).$$

Die absoluten Beweglichkeiten u und v hängen bei Gasen in erster Linie von der Dichte ab, sie wachsen, wenn diese abnimmt, indem sie ihr wahrscheinlich umgekehrt proportional sind. Bei geringen Dichten nehmen sie im Vergleich zu den Beweglichkeiten der Elektrolyte sehr grosse Werte an. Dagegen sind p und n im allgemeinen verhältnismässig klein.

2. *Räumliche Variation der Leitfähigkeit.* — Zweifellos bringt ein Querstrom in Gasen an seinen Elektroden Polarisierung hervor. Dazu kommt, dass in durchströmten Gasen die Leitfähigkeit eine Function der Stromdichte ist (vgl. unten). Aus diesen Gründen (vgl. p. 496) ist klar, dass die Methode der Querströme nur in roher Annäherung die räumliche Verteilung der Leitfähigkeit in durchströmten Gasen geben kann. Doch können wir sie, in Ermangelung besserer Methoden, einstweilen benutzen, um einen ersten Aufschluss darüber zu erhalten.

Nehmen wir an, dass die räumliche Verteilung der Leitfähigkeit parallel geht der räumlichen Variation der Querstromstärke in durchströmten Gasen, so können wir aus dieser über jene folgendes schliessen.

Die Versuche mit Querströmen lehren zunächst, dass *innerhalb eines durchströmten Gases die Leitfähigkeit im allgemeinen räumlich variabel ist*. Sodann liefern sie das wichtige Resultat, dass *in den leuchtenden Räumen die Leitfähigkeit in der Regel grösser ist als in den unmittelbar benachbarten dunklen; am grössten ist sie in der negativen Glimmschicht, am kleinsten in dem dunklen Raume unmittelbar an der Kathode; in den leuchtenden positiven Schichten ist sie grösser als in den dunklen*. Das gleiche lässt sich von der Anzahl der in der Volumeneinheit enthaltenen positiven und negativen Ionen sagen, da die Beweglichkeiten räumlich wohl so gut wie constant sind.

Für den Fall, dass ein Gas schon unabhängig von elektrischen Kräften leitend ist, zeigt die Untersuchung mit Querströmen, dass durch einen Strom die Leitfähigkeit in der Weise verändert wird, dass sie an der Kathode gegen diese zu *abnimmt*.

3. *Leitfähigkeit und Gefälle*. — Durch die Messungen Graham's¹⁾ und anderer wissen wir über den Verlauf des Gefälles in durchströmten verdünnten Gasen folgendes. Im dunklen Raum an der Kathode steigt es rasch zu sehr hohen Werten an, die niedrigsten Werte erreicht es an der Grenze des dunklen Kathodenraumes und der negativen Glimmschicht; in den leuchtenden Räumen besitzt es in der Regel relative Maxima, in den dunklen relative Minima, so insbesondere in der positiven geschichteten Lichtsäule.

Setzt man auch für Gase die Leitfähigkeit umgekehrt proportional dem Gefälle, so ergibt sich aus dem Vorstehenden in Uebereinstimmung mit den obigen Resultaten, dass die Leitfähigkeit im dunklen Kathodenraum klein, in der negativen Glimmschicht gross sein muss. Dagegen müssten in den leuchtenden Räumen relative Minima, in den dunklen relative

1) W. P. Graham, Wied. Ann. **64**. p. 49. 1897.

Maxima der Leitfähigkeit liegen. Dies widerspricht aber den Beobachtungen mit den Querströmen.

Dieser Widerspruch scheint sich zu Ungunsten der theoretischen Folgerung in folgender Weise zu erklären. In einem durchströmten Gas treten unter Umständen unabhängig von einer äusseren elektromotorischen Kraft innere Spannungsdifferenzen auf. Diese rühren sicher zum Teil von dem Konzentrationsgefälle der dissociirten Teilchen her, in der Hauptsache scheinen sie jedoch verursacht zu sein durch innere wahre Ladungen. Innerhalb einer Schicht einer solchen Ladung ist eine Fläche vorhanden, in der die von dieser herrührende Kraft Null ist; rechts und links von dieser Nullfläche übt die Ladung Kräfte aus in entgegengesetzter Richtung. Diese Kräfte lagern sich nun auf das Gefälle, dass eine äussere elektromotorische Kraft in dem Gase hervorbringt. Auf der einen Seite der Nullfläche wird dadurch das Gefälle vergrössert, auf der anderen verkleinert; folgen mehrere geladene Schichten aufeinander, so bewirken sie, dass das Gesamtgefälle, das sich der Messung darbietet, längs der Strombahn relative Maxima und Minima annimmt.

Dieses Auftreten von inneren Spannungsdifferenzen erlaubt nun im allgemeinen nicht, den zwischen zwei Querschnitten liegenden Gesamtwiderstand aus der Spannungsdifferenz zu berechnen oder die Leitfähigkeit umgekehrt proportional dem Gefälle zu setzen. Eben aus diesem Grunde muss zur Ermittlung der Leitfähigkeit in durchströmten Gasen zu der rohen Methode der Querströme gegriffen werden.

Nur in einer längeren ungeschichteten positiven Lichtsäule kann man gemäss der räumlichen Constanz der Leitfähigkeit und des Gefälles den Widerstand zwischen zwei Querschnitten und die Leitfähigkeit aus Spannungsdifferenz und Stromstärke berechnen und gerade diesen Umstand zur Definition der Leitfähigkeit eines durchströmten Gases benutzen.

Das Zusammenfallen der relativen Maxima und Minima des Gefälles und der Leitfähigkeit wird weiter unten erklärt.

4. *Leitfähigkeit und Stromstärke.* — Ein Gas kann durch verschiedene Mittel in den leitfähigen Zustand übergeführt werden, so durch starke Erhitzung, durch Röntgen- oder Uran-

strahlen. Wichtig ist, dass auch die Kathoden- und Canalstrahlen, oder mit anderen Worten elektrisch bewegte positive oder negative Teilchen die Eigenschaft besitzen, ein von ihnen durchsetztes Gas mittelbar oder unmittelbar aus irgend welchen Gründen zu ionisiren.

Von verschiedenen Seiten ist darauf hingewiesen worden, dass die Strahlen, die von der Kathode ausgehen, in deren Nähe das Gas leitend machen und dadurch ein Sinken des Gefälles hervorrufen müssen. Diese Auffassung hat man auf die ganze Strombahn und auf alle elektrisch wandernden positiven und negativen Teilchen auszudehnen.¹⁾ Zu beachten ist dabei, dass die ionisirende Wirkung der negativen Ionen, wahrscheinlich infolge ihrer grösseren Geschwindigkeit, grösser ist als diejenige der positiven.

Indem also ein Strom in einem Gas durch sein Gefälle Ionen in Bewegung setzt, verbessert er sich selbst die Leitfähigkeit auf seiner Bahn oder hält den stationären Zustand aufrecht, in dem jedes Volumenelement eine bestimmte Anzahl positiver und negativer Ionen besitzt. Man hat sich vorzustellen, dass in jedem Volumenelement des durchströmten Gases beständig einerseits Ionen durch Wiedervereinigung zu elektrisch neutralen Teilchen verschwinden, andererseits aber aus solchen Teilchen auch wieder Ionen neu gebildet werden infolge der ionisirenden Wirkung der vom Strom fortbewegten Ionen.

Dadurch, dass ein Strom durch die Wirkung seiner wandernden Ionen die Leitfähigkeit eines Gases erhöht, erscheint diese als eine Function der Stromstärke. Wie die Untersuchung mit Querströmen lehrt, *nimmt die Leitfähigkeit eines durchströmten Gases mit der Stromdichte zu und ab.*

In der ungeschichteten positiven Lichtsäule ist nach den obigen Versuchen die Leitfähigkeit angenähert proportional der Stromdichte. Es ist also in ihr das Verhältnis von Stromstärke und Leitfähigkeit angenähert constant. Dies entspricht der Thatsache, dass in der positiven Lichtsäule das Gefälle wenigstens in weiteren Röhren so gut wie unabhängig von der Stromstärke ist und einen constanten Wert besitzt.

1) J. J. Thomson, Phil. Mag. (5) 50. p. 278. 1900.

5. *Elektrische Aenderung der Concentration.* — Ich habe bereits in einer früheren Arbeit¹⁾ darauf hingewiesen, dass der in verdünnten Gasen bedeutende Unterschied der Geschwindigkeiten der positiven und negativen Ionen eine Verdünnung der elektrisch leitenden Teilchen unmittelbar an der Kathode zur Folge haben muss. In diesem Umstand ist eine der Ursachen zu sehen, welche die Leitfähigkeit an der Kathode so bedeutend herabsetzen. Noch eine andere Art der Aenderung der Leitfähigkeit durch die elektrische Strömung müssen wir in verdünnten Gasen zulassen.

Die Stärke des Gesamtstromes in einem Leiter sei J_g ; dieser sei zerlegt in einen Strom der positiven Teilchen von der Stärke J_p und einen der negativen von der Stärke J_n . Für den stationären Zustand muss gelten

$$\frac{\partial J_g}{\partial x} = \frac{\partial J_p}{\partial x} + \frac{\partial J_n}{\partial x} = 0.$$

Wir halten nun an dieser Bedingung fest, lassen aber die Möglichkeit zu, dass J_p und J_n räumlich variiren; es sei also an gewissen Stellen weder $\partial J_p / \partial x$ noch $\partial J_n / \partial x$ Null, wohl aber

$$\frac{\partial J_p}{\partial x} + \frac{\partial J_n}{\partial x}.$$

In einem bestimmten Querschnitt nehme nun in der Richtung nach der Kathode J_p auf $J_p - \partial J_p$ ab. Dann müssen in dem Querschnitt $k \cdot \partial J_p$ positive Ionen abgeschieden werden. Gleichzeitig muss aber die negative Stromstärke ebenfalls in dem Querschnitt abnehmen, nur in entgegengesetzter Richtung und zwar von J_n auf $J_n - \partial J_n$; demgemäss müssen dort auch $k \cdot \partial J_n$ negative Ionen abgeschieden werden. Da ∂J_p und ∂J_n numerisch gleich gross sind, so werden ebensoviele positive wie negative Ionen abgeschieden. Nimmt dagegen an einer Stelle J_p in der Richtung nach der Kathode zu, so werden dort gleich viele positive und negative Ionen von der elektrischen Strömung weggeführt.

Wenn also in einem Leiter die Stärken des positiven und des negativen Stromes räumlich variiren, so erfolgt an gewissen Stellen eine Zufuhr, an anderen eine Wegfuhr der elektrischen Teilchen,

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 2. p. 62. 1900.

und auf diese Weise wird deren Concentration durch die elektrische Strömung verändert. Die Erhöhung der Concentration an den Verdichtungsstellen findet ihr Ende im stationären Zustand, wenn dort durch Wiedervereinigung zu elektrisch neutralen Teilchen ebensoviele Ionen verschwinden, als durch die elektrische Strömung zugeführt oder neu geschaffen werden. An jenen Stellen hat dann auch die Gasdichte etwas höhere Werte, als an benachbarten Verdünnungsstellen bei gleicher Temperatur.

Das Auftreten innerer Ladungen oder eine Verschiedenheit von p und n in Gasen bedingt eine relative räumliche Variation der positiven und der negativen Leitfähigkeit

$$(\pi = p \cdot \varepsilon \cdot u, \quad \nu = n \cdot \varepsilon \cdot v),$$

dadurch wird aber eine relative räumliche Variation der Stärke des positiven und negativen Stromes veranlasst, und diese zieht dann wieder die eben betrachtete Aenderung der Leitfähigkeit durch die elektrische Strömung nach sich.

Die Stellen, wo die positive Leitfähigkeit und Stromstärke nach der Kathode zu abnehmen, sind nun diejenigen, wo auf eine positive innere Ladung eine negative folgt, oder die Stellen, an denen ein relatives Maximum des Gefälles liegt. An den Stellen also, wo das Gefälle und in der Regel auch das elektrische Leuchten relative Maxima besitzt, wird durch die elektrische Strömung die Zahl der positiven und negativen Ionen und damit auch die Leitfähigkeit vergrößert, dagegen verkleinert, wie leicht zu sehen ist, an den Stellen relativer Minima des Gefälles.

Resultate.

1. Die Stärke eines Querstromes ist unabhängig von dem Gefälle des Längsstromes; aus ihr lässt sich die Leitfähigkeit an dem Ort der Querelektroden angenähert bestimmen.
2. Die Leitfähigkeit in durchströmten Gasen ist im allgemeinen räumlich variabel; sie ist in den leuchtenden Räumen in der Regel grösser, als in den benachbarten dunklen.
3. Die räumliche Variation der Leitfähigkeit erfolgt zum Teil nicht nach Maassgabe der räumlichen Variation des Ge-

falles. Dies erklärt sich aus dem Auftreten innerer Spannungsdifferenzen.

4. Gemäss der ionisirenden Wirkung der elektrisch wandernden Teilchen nimmt in einem Gas die Leitfähigkeit mit der Stromdichte zu.

5. Bei räumlicher Variation der Stärke des positiven und des negativen Stromes veranlasst die elektrische Strömung eine Aenderung der Concentration der Ionen und damit der Leitfähigkeit.

Göttingen, Physik. Inst. d. Univ., September 1900.

(Eingegangen 26. September 1900.)

8. Ueber unipolare Induction und den Pohl'schen Versuch; von Ernst Lecher.

Die Erscheinungen der unipolaren Induction wurden in verschiedener Weise zu erklären versucht, entweder durch Einführung von Fernwirkungen oder mittels der Kraftlinien Faraday's. Des Letzteren Anschauungen traten immer mehr in den Vordergrund, besonders durch das riesige Anwachsen der Elektrotechnik, welche — sehr zu ihrem Vortheile — in den einschlägigen Gebieten ausschliesslich mit Kraftlinien zu arbeiten gewohnt ist. In der rein wissenschaftlichen Physik aber ist oft ein Vermengen dieser beiden Auffassungen eingetreten und selbst Lehrbücher ersten Ranges und neuesten Datums zeigen — wohl um pädagogische Schwerfälligkeiten zu meiden — gewisse Rückfälle in liebgewonnene Fernwirkungsgewohnheiten.

Das Missverständniss zwischen Hrn. W. König¹⁾ und mir entspringt, wie ich glaube, einem solchen Confundiren zweier nicht immer ganz vereinbarer Ideenkreise.

Ich hielt es nämlich für dankbar, strenge auf dem Standpunkte Faraday's zu bleiben. Dabei denke ich an die späteren Arbeiten dieses Forschers, dessen Begriffe von Kraftlinien sich ja erst allmählich ausbildeten.²⁾ Als hinreichender Ausgangspunkt diene mir der einzige Satz: *Eine elektromotorische Kraft entsteht, wenn ein Leiter Kraftlinien schneidet.*

Ich trat gegen jene Fassung des Biot-Savart'schen Elementargesetzes auf, wonach ein Magnetpol längs den Kraftlinien um einen linearen Leiter rotire.³⁾ Hier ist der Fernwirkungsbegriff des „Poles“ mit dem Faraday'schen Kraftlinienbegriffe in einer zwar pädagogisch unendlich bequemen, aber nicht einwandfreien Weise verknüpft.

1) W. König, Ann. d. Phys. 2. p. 854. 1900.

2) E. Lecher, Wied. Ann. 69. p. 784. 1899.

3) E. Lecher, Wied. Ann. 54. p. 282. 1895; 69. p. 781. 1899.

Vermutung über die Angriffspunkte der Kräfte.

Wenn wir sagen, dass Kraftlinien nur auf Kraftlinien wirken können, so würde es oft schwer fallen, die Richtungen und Angriffspunkte der Kräfte genau anzugeben. Es erscheint mir besser an jenen Stellen, wo die Kraftlinien eines Systems mit einem zweiten Leiter (oder Magneten) in Berührung kommen, die Angriffspunkte der Kräfte zu suchen. *Man fasse aber immer zuerst den Vorgang der Induction ins Auge.* Ich will diesen Grundsatz an drei Beispielen erläutern:

a) Betrachten wir zuerst die ponderomotorische Wirkung zweier stromdurchflossener Leiter I und II aufeinander.

Um über den Angriffspunkt der Kräfte Aufschluss zu erlangen, sei Leiter I zunächst stromlos, hingegen Leiter II stromdurchflossen; es sind somit nur die von II erzeugten Kraftlinien vorhanden. Bei einer relativen Bewegung von I gegen II werden somit (im allgemeinen) durch den Leiter I die Kraftlinien von II geschnitten und in I ein Strom inducirt, dessen Entstehungsursache zunächst einen Contact der Kraftlinien von II mit dem Leiter I voraussetzt: es ist also jedenfalls — örtlich — in I die Entstehungsursache des inducirten Stromes zu suchen.

Denken wir nun an die analoge ponderomotorische Wirkung von I gegen II, so liegt sicher — örtlich — an derselben Stelle der Sitz der Wirkung. Ein Strom in I drückt die Kraftlinien von II hinaus und den mit diesen Kraftlinien verbundenen Leiter.¹⁾

Es scheint selbstverständlich, dass bei dieser Schlussweise I und II vertauscht werden können; dies ist meistens, aber nicht immer der Fall.

1) Für die unipolare Induction, d. h. für eine Drehung des Magneten um seine Axe, wobei das äussere Feld im Raume unverändert bleibt, leugnete ich ein starres Festsitzen der Kraftlinien an den Magneten (Wied. Ann. 54. p. 276. 1895). Für *translatorische* Verschiebungen eines Magneten habe ich dergleichen nie behauptet. Ob ich eine Schlinge über einen ruhenden Magnet schiebe, oder den Magneten in die ruhende Schlinge stecke, ist für die Inductionerscheinungen gleich. Die einzelne Kraftlinie ist durch Längs- und Querkräfte zwischen ihren Nachbarlinien eingebettet und erhält dadurch bei translatorischen Bewegungen des Magneten eine Art von starrer Verbindung mit dem Magneten.

b) Betrachten wir nun in gleicher Weise die Wirkung eines Stromes auf einen Magneten, z. B. die Oersted'sche Ablenkung einer Magnethadel.

Es sei wieder zuerst der Leiter stromlos, also nur die Kraftlinien des Magneten vorhanden. Ein Drehen desselben wird durch das Schneiden der Kraftlinien im Leiter Strom induciren. Also muss auch die ponderomotorische Ablenkung der Nadel durch einen Strom sich so erklären lassen, dass der stromdurchflossene Leiter die mit ihm in Berührung befindlichen Kraftlinien und so den mit seinen Kraftlinien fest verbundenen Magneten hinausdrückt.

Kann man hier nicht auch sagen, dass die Kraftlinien des Stromes mit dem Magneten in Contact sind und denselben drehen?

Um diese Frage zu beantworten, denken wir uns die Magnethadel durch ein Solenoid ersetzt. Dann sehen wir gleich, dass jetzt bei einer entsprechenden mechanischen Drehung des stromlosen Solenoides die Kraftlinien des stromdurchflossenen Leiters das Solenoid schneiden und in demselben Strom induciren. Wir müssen also obige Frage mit Ja beantworten.

Wir können somit hier den Angriffspunkt der Kräfte im Leiter oder im Magneten suchen.

c) Es sei nun aa' ein linearer Leiter und ns ein Magnet mit den punktirt gezeichneten Kraftlinien (vgl. Fig. 1).

Bei einer mechanisch eingeleiteten Bewegung des stromlosen Leiters aa' gegen ns werden (im allgemeinen) Kraftlinien geschnitten werden, es ist also an jener Stelle, wo die Kraftlinien mit aa' in Contact treten, der Sitz der Wirkung zu suchen. Ebenso muss auch bei einer Umkehrung der Erscheinung, bei einer ponderomotorischen Wirkung zwischen Strom und Magneten der Angriffspunkt der Kraft in aa' gesucht werden. Von oben gesehen sei a der Leiter, n das Magnetende und k eine vom Magnetende ausgehende Kraftlinie (vgl. Fig. 2). Wenn nun durch aa' ein Strom geht, so entsteht nach meiner Meinung kein Drehungsmoment, sondern zunächst eine Kraft α , welche auf den Leiter wirkt und als Reaction eine ebenso grosse Kraft α' , welche die Kraftlinie wegzuschieben sucht. k wirkt wie eine starre Verbindung mit n ; es entsteht

wohl ein Drehungsmoment, wenn a um n drehbar ist, nicht aber wenn die Drehungsaxe des Systems in a liegt.

Könnte man aber nicht auch hier die Sache so auffassen, dass die Kraftlinien des stromdurchflossenen aa' auf das Magnetende n wirken und dasselbe im Kreise herumführen?

Zur Beantwortung dieser Frage gehen wir so vor, wie eben vorhin. Ersetzen wir in Fig. 1 den Magnet ns durch ein entsprechendes Solenoid und nehmen wir an, es sei aa' stromdurchflossen, das Solenoid aber stromlos. Wenn ich jetzt den Leiter aa' um das Solenoid drehe, oder umgekehrt, so wird im Solenoid *kein Strom* inducirt. Wir haben also für diesen Fall im Solenoid keinen Sitz einer Kraftwirkung zu



Fig. 1.

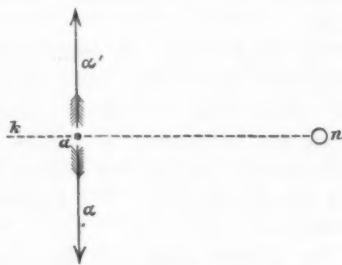


Fig. 2.

suchen; die in Fig. 2 dargestellte Skizzirung der Kraftwirkungen ist die einzig mögliche. Es wird also auch das Solenoid (oder der Magnet) nicht um aa' rotiren.

Ich habe in der Ueberschrift dieses Abschnittes den Ausdruck „Vermutung“ gebraucht, weil diese meine Anschauungen vielleicht einmal der Prüfung durch den Versuch werden zugänglich sein. Die Schwierigkeit eines Experimentes liegt in einer einwandfreien Stromzuführung nach a und a' .

Es sind aber diese meine Vorstellungen für das Endergebnis dieser Publication nicht unbedingt notwendig. Dieselben scheinen mir sehr verführerisch, weil sie mich jener mechanisch äusserst unsympathischen Kräfte entraten lassen, deren Richtung nicht als Verbindungslinie der wirkenden Punkte auftritt. Das Drehungsmoment entsteht durch eine starre Verbindung wie beim Hebel und in ähnlichen Fällen.

Unmöglichkeit der Rotation eines Poles um einen linearen
Leiter nach Faraday.

In den Figg. 1 und 2 ändere ich nach der Fernwirkungstheorie nichts Wesentliches, wenn ich statt eines Poles deren mehrere rund herum um den Leiter anbringe. So gelange ich zur unipolaren Induction.

Es sei aa' der Leiter und $n \dots n$ magnetische Nordpole, $s \dots s$ magnetische Südpole (vgl. Fig. 3). Nach dem Biot-Savart'schen Elementargesetze müsste, wenn $n \dots n$ um aa' als Axe rotirt, in aa' ein Strom inducirt werden. Nach Faraday ist das absolut unmöglich, da durch aa' auch nicht eine einzige Kraftlinie geht.



Fig. 3.

Beim Pohl'schen Versuche liegen die Verhältnisse ähnlich, besonders augenfällig, wenn man zwei Magnete nimmt und „dafür sorgt, dass die Pole möglichst nahe an a sich befinden“.¹⁾ Dadurch werden ja nach Faraday die Kraftlinien von aa' weggedrückt. —

Wie sieht aber die Sache bei Verwendung nur eines Magneten aus?

Derselbe hat bei der Drehung um aa' sowohl eine translatorische Bewegung, als auch eine Rotation um die Magnetaxe. Nehmen wir die Kraftlinien als ganz starr mit dem Magneten verbunden an (Preston), so tritt, wie auch Hr. König zugegeben hat, kein Schneiden der Kraftlinien ein. Nehmen wir aber an, es seien die Kraftlinien unabhängig von der Rotation des Magneten um die Magnetaxe, so kann das bei der gleichzeitigen Raumveränderung der Magnetaxe nur den Sinn haben, dass diese Kraftlinien an der Rotation des Magneten um die Magnetaxe keinen Anteil haben, d. h. immer nach derselben Weltrichtung orientirt bleiben, aber doch gleichzeitig mit dem Magneten sich translatorisch weiterbewegen. Es stelle Fig. 4 den Pohl'schen Versuch dar. b ist die gewöhnliche Hg-Rinne, c eine viel weitere. (Man denke sich in der schematischen Zeichnung sowohl b als c um aa' als Axe im Kreise herumgeführt.) Es sei zuerst die Leitung $aa'cy$

1) P. Drude, Physik des Aethers p. 76. 1894.

geschlossen. (z sei nicht vorhanden.) Dann würden die (punktirt gezeichneten) Kraftlinien nach dieser Auffassung bei einer mechanischen Drehung des Magneten um aa' als Axe den Leiter schneiden und zwar die Kraftlinien links von ns in entgegengesetzter Richtung wie die Kraftlinien rechts von ns , es werden also zwei gleich grosse, entgegengesetzte Ströme inducirt, welche sich aufheben.¹⁾ Die Sache wird gleich anders, wenn die Leitung $aa'bz$ geschlossen wird (y sei jetzt nicht vorhanden). Dann wird die früher bestandene Symmetrie ge-

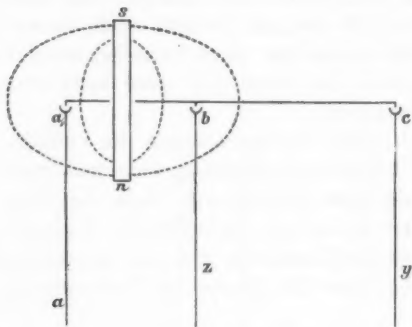


Fig. 4.

stört und das Nicht-Schneiden der Kraftlinien in z ²⁾ erzeugt bei einer Rotation des Systems um aa' einen Inductionsstrom.

Man kann die Sache auch so auffassen: Das stromdurchflossene $aa'bz$ ist eine magnetische Doppelfläche. Wäre dieselbe fest mit n verbunden, so kann keine Wirkung auftreten. Nun ist beim Pohl'schen Versuche aa' (weil in unveränderter Entfernung) und $a'b$ fest mit dem Magneten verbunden, es tritt also nur die Restwirkung von bz und za auf. Die Ursache der Pohl'schen Rotation ist im Drahte z zu suchen. Mache ich aber die magnetische Doppelfläche sehr gross, $aa'cy$ (z sei

1) Ob die Stromleitung quer durch das Eisen des Magneten geht, oder aussen herumgeführt wird, ist gleichgültig sowohl nach Preston als auch nach Faraday.

2) W. König, Ann. d. Phys. 2. p. 855. 1900. „Es soll die Ursache der Rotation im Drahte z zu suchen sein. Es ist mir ganz unverständlich, was Hr. Lecher mit diesem Ausspruche meint.“

jetzt nicht vorhanden), so liegt der nicht mit dem Magneten fest verbundene Teil y so weit, dass fast gar keine Kraftlinien durch y gehen und daher fast keine Wirkung auftreten kann.

Ich habe diese in Fig. 4 schematisch dargestellte Anordnung ausgeführt. b war die gewöhnliche Hg-Rinne des Pohl'schen Apparates, c aber eine Hg-Rinne mit etwa 40 cm Radius. Die Reibung ist in dieser Rinne so gross, dass die Beobachtung ponderomotorischer Wirkungen ausgeschlossen war. Wohl aber lassen sich trotz Störungen durch die Kraftlinien der Erde und durch Thermostrome Inductionswirkungen ganz deutlich beobachten. Bei einer mechanischen Drehung des Systems um 45° wurde (nach Abrechnung der Fehlerquellen) in $aa'bz$ ein Ausschlag von etwa 19 Scalenteilen, in $aa'cy$ aber ein solcher von höchstens 2 Scalenteilen im Mittel gemessen. — Dieses Resultat widerspricht vielleicht nicht der Auffassung, wohl aber der Darstellungsweise von Hrn. König¹⁾ und anderen.²⁾

Unmöglichkeit der Rotation eines Poles um einen linearen Leiter nach König.

Mein von Hrn. König angegriffenes Experiment³⁾ ist — für sich allein betrachtet — allerdings nicht beweisend. Der Strom geht hier von aa' in den Magneten, und durch dessen obere Hälfte in der gezeichneten Weise (Fig. 5) in die Hg-Rinne w . Bei einer Umdrehung um aa' als Axe wird sowohl in aa' als auch in der oberen Axe des Magneten dieselbe elektromotorische Kraft inducirt, aber in einander auf-

1) W. König, Ann. d. Phys. 2. p. 856, Zeile 1—20 von oben, 1900.

2) Es ist ja selbstverständlich, dass eine eingehende Anwendung des Biot-Savart'schen Gesetzes unter Berücksichtigung des ganzen Stromkreises ein richtiges Resultat giebt. Es ist aber wohl Biot selbst die Ursache der allgemein üblichen, falschen Darstellung. (Vgl. Experimentalphysik von J. B. Biot, übersetzt von G. Th. Fechner, Leipzig, Voss 1829. IV. p. 160, Zeile 16—24 von oben und p. 201.) Nach ihm wäre der Leiter $a_1 b z$ und $a_1 b c$ (er nennt denselben in einem analogen Versuche $F F' Z$) ohne Einfluss auf die Bewegung. — Auch König und fast alle Lehrbücher haben sich von dieser Anschauungsweise nicht, oder mindestens nicht so vollständig emancipirt, dass nicht Missverständnisse möglich wären.

3) E. Lecher, Wied. Ann. 69. p. 783. 1899.

hebenden, entgegengesetzten Richtungen. Das ist in Kürze der König'sche Einwurf.¹⁾

Wenn ich gleichwohl den Versuch als der Veröffentlichung wert erachtete, so liegt der Grund darin, dass bei einer Drehung von n um aa' Magnet und Leiter nicht fest miteinander verbunden sind; hingegen bildet Magnetpol s und der daselbst nach oben gehende Leiter ein starres Ganzes. Mit Rücksicht auf diesen Unterschied erwäge man nun König's Darstellung des Fleischmann'schen Versuches.²⁾ Hier ist nach Hrn. König der Fall so, dass man einen linearen Leiter und nebenan einen Pol hat, der andere Pol ist eliminirt. „Einen völligen Ausschluss der Einwirkung des Stromes auf die einen Pole der Magnet-systeme erreicht man, wenn man nach Fleischmann den Stromleiter röhrenförmig bildet und die einen Pole in das Innere der Röhre hineinführt, dann entspricht das auf die äusseren Pole wirkende Feld genau dem Feld eines linearen Stromleiters.“³⁾ Hier hätten wir also nach König den Fall unserer Fig. 1 idealisirt: linearer Stromleiter und nur ein Magnetpol. Der Versuch ergibt:

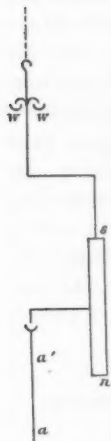


Fig. 5.

1. Rotation des Magnetpoles um den festgehaltenen Leiter;
2. Rotation des Leiters um seine Axe bei festgehaltenem Magneten (Reaction der Wirkung 1);
3. Ausbleiben jeder Drehung, wenn Magnet und Leiter fest verbunden sind.

Acceptirt man also — und das hätte ich vielleicht in meiner letzten Publication stärker betonen sollen — die übliche Darstellung vom Rotiren eines Poles längs den Kraftlinien, so ergibt mein Versuch (Fig. 5) ein Resultat, welches ganz unerwartet sein musste und das unmöglich als „selbstverständlich“ erscheinen durfte. Nach dem König-Fleischmann'schen Versuche kann bei s keine Rotation eintreten (Magnetpol und Leiter fest verbunden), wohl aber bei aa' (wo keine fixe Verbindung ist). — Dass dem nicht so ist, zeigt eben mein Versuch.

1) W. König, Ann. d. Phys. 2. p. 857. 1900.

2) L. Fleischmann, Wied. Ann. 60. p. 519. 1897.

3) W. König, Ann. d. Phys. 2. p. 856. 1900.

Es wird mir somit unmöglich, die Folgerung zu umgehen, dass die König'sche Auffassung¹⁾ der besprochenen Experimente nicht einwandsfrei zu sein scheint, während die von mir vertretene Darstellung mittels Kraftlinien sowohl den König-Fleischmann'schen Versuch als auch alle anderen mir bekannten einschlägigen Erscheinungen einfach zu übersehen und zu erklären gestattet.

Ich glaube zu folgenden zwei Schlüssen kommen zu müssen:

1. Die alte Biot-Savart'sche Vorstellung von der Rotation eines Poles um einen linearen Leiter *ohne Berücksichtigung der Zuleitungsdrähte* widerspricht den experimentellen Ergebnissen.

2. Die landläufige Erklärung des alten Pohl'schen Versuches mittels Rotation des Poles längs den Kraftlinien des linearen Mittelleiters ist unhaltbar. Diese Drehung erfolgt vielmehr durch Wirkung der bisher meist unbeachtet gebliebenen seitlichen Zuleitungen.

St. Georgen a. L., 1. September 1900.

1) Diese König'sche Auffassung und eventuelle Konsequenzen derselben veranlassten mich zu einigen Experimenten, welche alle versagten. Vgl. Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 108. p. 980. 1899.

(Eingegangen 5. September 1900.)

**9. Einige Bemerkungen
zu zwei Aufsätzen von Lecher und König;
von H. Lorberg.**

Gegenüber einer Abhandlung von Lecher¹⁾, sowie der Erwiderung auf dieselbe von König²⁾ mögen einem Vertreter der älteren Richtung ein paar elementare Bemerkungen gestattet sein.

Dass die Kraft eines Magnetpoles auf ein Stromelement an letzterem angreift, darüber scheint in der experimentellen wie in der mathematischen Physik, soweit man überhaupt von *Stromelementen* spricht, Einverständnis zu bestehen; anders aber ist es hinsichtlich der Kraft eines Stromelementes auf einen Magnetpol. Maxwell in seinem Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus spricht sich über diese Frage nicht aus; denn das um einen Strom existierende magnetische Kraftfeld, in welchem an jedem Magnetpol eine Kraft angreift, leitet er nur für einen beiderseits unendlichen geradlinigen Strom ab, und zwar aus dem Potential einer Magnetschale, welche er sich durch den geradlinigen Stromleiter und durch den ihn schliessenden, ganz im Unendlichen verlaufenden Leiterteil gelegt denkt, also für einen geschlossenen Strom. Kirchhoff³⁾ legt die Hypothese der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung zu Grunde, wonach bei starrer Verbindung des Poles und des Stromelementes das System durch die gegenseitigen, inneren Kräfte nicht bewegt werden kann, also sowohl die beiden Kräfte als auch die beiden Kräftepaare, mithin auch die beiden Drehungsmomente um eine beliebige, mit dem System starr verbundene Axe entgegengesetzt gleich sein müssen, woraus folgt, — ein Schluss, den Kirchhoff allerdings, vielleicht als zu selbstverständlich, nicht ausdrücklich zieht —

1) E. Lecher, Wied. Ann. 69. p. 779. 1899.

2) W. König, Ann. d. Phys. 2. p. 854. 1900.

3) G. Kirchhoff, Vorlesungen über Elektrizität und Magnetismus p. 205. 1891.

dass die beiden Kräfte durch denselben Punkt gehen, dass also die Kraft eines Stromelementes auf einen Pol durch das Stromelement *geht*. (Es wäre natürlich bei nicht starrer Verbindung beider ungenau oder vielmehr, wörtlich verstanden, widersinnig zu sagen, die Kraft eines Stromelementes auf einen Pol *greife* am Stromelement *an*.) Zu demselben Resultat kommt Righi¹⁾ auf Grund der Hypothese, dass ein Elementarstrom hinsichtlich der ponderomotorischen Wirkungen, welche er auf ein Stromelement ausübt oder von einem Stromelement erfährt, mit einem magnetischen Molecül äquivalent ist. Nach dieser durch das Biot-Savart'sche Gesetz für die Wirkung eines Poles auf ein Stromelement in Verbindung mit dem Princip der Reaction ausgesprochenen Theorie — der einzigen, welche bisher in der mathematischen Physik auf die ponderomotorischen und elektromotorischen Wirkungen zwischen ungeschlossenen endlichen Stromleitern und Magneten Anwendung gefunden hat — ist also das Drehungsmoment, welches ein geradliniges Stromstück auf einen Pol ausübt, um das Stromstück (die z -Axe) als Axe immer gleich Null, mag das Stromstück endliche oder unendliche Länge haben, und das Drehungsmoment des ganzen geschlossenen Stromes um die z -Axe rührt lediglich von dem Rest α des geschlossenen Stromes her; bezeichnet ids ein Element von α , (xyz) seine Coordinaten, $(x'y'z')$ die Coordinaten des Poles μ , $(K_x K_y K_z)$ die Componenten der von ds auf μ ausgeübten Kraft K , welche also auf der Ebene (ds, μ) senkrecht steht und durch ds geht, so ist das Drehungsmoment dieser Kraft um die z -Axe:

$$(1) \quad \begin{cases} dM(\alpha) = xK_y - yK_x = [(x-x')K_y - (y-y')K_x] \\ \quad + [x'K_y - y'K_x] = dM_1 + dM_2. \end{cases}$$

dM_1 ist das Drehungsmoment der Kraft K um die der z -Axe parallele Axe durch den Pol, und hat bekanntlich den Wert:

$$(2) \quad dM_1 = -\mu i ds \frac{\partial}{\partial s} [\cos(r, z)],$$

wo (r, z) den Winkel zwischen der von μ nach ds gezogenen Richtung r und der positiven z -Richtung (der Stromrichtung)

1) A. Righi, Bologna Mem. (5) I. — Vgl. Fortschritte der Math. 1890, p. 1084.

bezeichnet; dM_2 ist das Drehungsmoment der im Pol angreifend gedachten Kraft K um die z -Axe. Ist also 1 und 2 der Eintritts- und Austrittspunkt des Stromes in der z -Axe, so ist das ganze Drehungsmoment des Stromtheiles α :

$$(3) \quad M(\alpha) = M_1(\alpha) + M_2(\alpha) = \mu i [\cos(r_2, z) - \cos(r_1, z)] + M_2(\alpha),$$

wo $M_2(\alpha)$ das Drehungsmoment der im Pol angreifend gedachten resultirenden Kraft des Stromstückes α um die z -Axe bezeichnet. Betrachtet man den Strom in der z -Axe mathematisch als beiderseits unendlich, so wird $M_1(\alpha) = 2\mu i$; ferner ist dann $M_2(\alpha) = 0$, da die resultirende Kraft des ganz im Unendlichen liegenden Stromstückes α den Wert Null hat, folglich, wenn man sie am Pol angebracht denkt, auch ihr Drehungsmoment um die z -Axe; nach Gleichung (3) ergibt sich also für das Drehungsmoment des ganzen geschlossenen Stromes:

$$(4) \quad M = M(z) + M(\alpha) = M(\alpha) = 2\mu i,$$

also derselbe Wert, den Hr. König¹⁾ nach Maxwell (II, p. 171) für das Drehungsmoment $M(z)$ des unendlichen Stromtheiles in der z -Axe allein ableitet. Nach dem Biot-Savart'schen Gesetz in Verbindung mit dem Princip der Reaction darf man also die Wirkung des ganz im Unendlichen liegenden Schlussstückes nicht vernachlässigen, mithin nicht einen beiderseits unendlichen geradlinigen Strom *für sich allein* als äquivalent einer Magnetschale annehmen und hieraus folgern, dass seine Kraft auf einen Pol an diesem angreife. Uebrigens erkennt Hr. König die Gültigkeit des Principes der Reaction selbst ausdrücklich an, indem er in seiner Abhandlung über einen neuen, von ihm construirten elektromagnetischen Rotationsapparat sagt²⁾: „Verbindet man die Röhre und das Magnetbündel fest miteinander, so tritt keine Rotation ein, womit sich zugleich die Gleichheit der beiden entgegengesetzten Drehungsmomente beweisen lässt.“ Aus der Gleichheit der Drehungsmomente aber, in Verbindung mit dem Satz, dass auch die gegenseitigen Kräfte entgegengesetzt gleich sind, folgt mit Notwendigkeit, dass die Kraft eines Stromelementes

1) W. König, l. c. p. 857.

2) W. König, Wied. Ann. 60. p. 521. 1897.

auf einen Pol und eines Poles auf ein Stromelement durch denselben Punkt, also durch das Stromelement gehen.

Hiernach ist Hr. Lecher mit der erwähnten Kirchhoff-Righi'schen Theorie in Uebereinstimmung, wenn er behauptet¹⁾, dass bei dem Pohl'schen Versuch die Ursache der Rotation des Magneten nicht in dem in der Drehungsaxe fließenden Stromteil $a a'$ (Fig. 1 seiner Abhandlung), welcher vielmehr nach jener Theorie vollkommen wirkungslos ist, sondern in dem Rest z des geschlossenen Stromes zu suchen sei; und wenn Hr. König den Ausdruck: „Die Ursache der Rotation des Poles liege im Leiter, und zwar vorwiegend in einem bestimmten Teil desselben“ bemängelt und statt dessen gesagt wissen will: „die Ursache ist die Kraft, welche der Stromkreis am Ort des Magneten ausübt“, so scheint mir das ein blosser Wortstreit; zudem wird jener Ausdruck durch die Bedürfnisse der theoretischen Physik gerechtfertigt, welche nicht umhin kann, die Wirkung einzelner Teile eines geschlossenen Stromes zu betrachten, um viele Erscheinungen des Elektromagnetismus und der Induction quantitativ zu erklären.

Was nun aber den von Hrn. Lecher angestellten Versuch (Fig. 3a seiner Abhandlung) betrifft, durch welchen er seine obige Behauptung experimentell bewiesen zu haben glaubt, so stimme ich allerdings mit der Ansicht des Hrn. König, dass demselben jede Beweiskraft fehlt, überein, nicht aber mit der von ihm gegebenen Begründung. Bei diesem Versuch steigt der Strom J in dem langen feststehenden Teil $a a'$ der Drehungsaxe (der z -Axe) auf, tritt aus einem Quecksilbernäpfchen in einen rotirenden Arm, an welchem der verticale Magnetstab mit seiner Mitte fest sitzt, geht durch die obere Hälfte des Magneten, dann durch einen am Magneten befestigten rechtwinklig gebogenen Draht zuerst vertical weiter, dann zum drehbaren Teil der Axe und von dieser in die feststehende Leitung und über die Batterie nach a zurück. Der untere Pol (Nordpol) steht vorwiegend unter dem Einfluss des feststehenden Leiterteiles $a a'$; betrachtet man diesen als beiderseits unendlich und nimmt mit Hrn. König die von ihm auf den Pol von der Stärke m ausgeübte Kraft als am Pol an-

1) E. Lecher, l. c. p. 782.

greifend an (vgl. dagegen die obige Bemerkung zu Gleichung (4)), so ist das Drehungsmoment dieser Kraft um die z -Axe:

$$(5) \quad M_N = 2 m J.$$

Durchaus im Widerspruch, wie ich meine, mit den bisherigen Principien der Mechanik steht aber die Art, wie Hr. König das auf den Südpol, der selbst vom Strom durchflossen wird, wirkende Drehungsmoment berechnet. Er ersetzt den Pol durch eine Belegung der oberen Endfläche des cylindrischen Magneten, wobei auf jedes Flächenelement df_1 eine Magnetismusmenge μdf_1 kommt, betrachtet den Strom wieder als einen beiderseits unendlichen geradlinigen, indem er ihn zunächst durch einen cylindrischen Leiter von gleichem Querschnitt mit dem Magneten aus diesem herausgeführt annimmt, und zerlegt ihn in Stromfäden parallel der z -Axe, von denen der durch ein Element df_2 der Endfläche gehende die Intensität $j df_2$ hat. Das Drehungsmoment der am Pol in df_1 angreifenden Kraft K des Stromfadens in df_2 um die Axe des Stromfadens ist nach Gleichung (5)

$$M_{12} = 2 \mu df_1 \cdot j df_2;$$

ebenso gross und gleich gerichtet ist das Drehungsmoment um eine durch den Pol gehende, der z -Axe parallele Axe, welches von der entgegengesetzt gerichteten und am Stromfaden angreifenden Kraft K des Poles auf den Stromfaden herrührt; die Wechselwirkung zwischen dem Pol in df_1 und dem Stromfaden in df_2 liefert also an dem starr verbundenen System Pol + Stromfaden + z -Axe ein Kräftepaar vom Moment M_{12} ; und ein gleiches und gleich gerichtetes Kräftepaar liefert die Wechselwirkung zwischen dem Stromfaden in df_1 und dem Pol in df_2 . Bezeichnen wir nun mit $12 \sum$ eine Summation über sämtliche Elementenpaare df_1, df_2 , jedes Paar nur einmal genommen, so liefert die Wechselwirkung des ganzen Systems ein resultirendes Kräftepaar oder Drehungsmoment um die z -Axe:

$$(5a) \quad \begin{cases} M_s = 12 \sum 2 M_{12} = 1 \sum 2 \sum M_{12} \\ \quad = 1 \sum 2 \mu df_1^2 \sum j df_2 = 2 m J. \end{cases}$$

Da nun dieses Drehungsmoment die entgegengesetzte Richtung hat, wie das in Gleichung (5), so heben sich beide einander

auf, und es erklärt sich nach Hrn. König das negative Resultat des Lecher'schen Versuches. In dieser ganzen Betrachtungsweise ändert sich nichts Wesentliches, wenn man statt eines einzigen Magneten zwei symmetrisch zur z -Axe liegende mit den Polen m und m' anbringt; das Drehungsmoment auf die zwei unteren Nordpole ist dann $M_N = 2(m + m')J$; für die zwei Südpole kommt zu dem obigen Drehungsmoment $(m + m')J$, welches von der Wechselwirkung zwischen jedem Pol und dem ihn durchfließenden Strom $J/2$ herrührt, noch das Drehungsmoment der Wechselwirkung zwischen jedem Pol und dem durch den anderen Pol fließenden Strom hinzu, welches nach Gleichung (5a) gleich $(m + m')J$ ist; die Summe ist wieder

$$M_S = 2(m + m')J = M_N.$$

Nach dieser Schlussweise soll also ein cylindrischer, von einem hinreichend langen, seiner Axe parallelen Strom durchflossener Magnet durch die Wechselwirkung zwischen dem Strom und dem einen Pol um seine Axe oder um eine beliebige parallele Axe, an welcher der Magnet befestigt ist, gedreht werden, falls man die Wechselwirkung zwischen dem Strom und dem anderen Pol dadurch ausschliesst, dass man den Strom dem Magneten etwa in seiner Mitte zuleitet. („Wie bei dem bekannten Versuch mit dem um seine Axe rotirenden Magneten“, setzt Hr. König hinzu; über die nach meiner Ansicht richtige, in der schon oben besprochenen Weise auf dem Princip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung beruhende Erklärung dieses Versuches vgl. z. B. mein Lehrbuch der Physik, p. 300. Leipzig 1877.) Wo bleibt aber bei dieser Schlussweise das bisher in der Mechanik als gültig angenommene Princip, dass ein starres System durch Kräfte, welche zwischen seinen Teilen wirken, nicht in Bewegung gesetzt werden kann, dass daher die zwei Drehungsmomente jeder Wechselwirkung um eine beliebige Axe nicht gleichsinnig-gleich, sondern entgegengesetzt-gleich sein müssen? Und als starr miteinander verbunden hat doch bisher jede Theorie einen Strom und einen Magnetpol angenommen, wenn ihre ponderablen Träger starr miteinander verbunden sind, da die zwischen der Elektrizität und dem Magnetismus wirkenden Kräfte sich auf die ponderablen Träger übertragen. Und wie stimmt diese Schluss-

weise mit dem oben angeführten Versuch des Hrn. König, wonach die Röhre und das Magnetbündel bei fester Verbindung beider sich nicht um die Axe drehen, sowie mit seiner eigenen Erklärung dieses Resultates: „weil die beiden Drehungsmomente *entgegengesetzt*-gleich sind“?

Nach dem Princip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung, aus welchem folgt, dass die beiden Drehungsmomente der Wechselwirkung zwischen einem Stromelement und einem Pol in Bezug auf jede beliebige Axe *entgegengesetzt*-gleich sind, dass daher die beiden *entgegengesetzt*-gleichen Kräfte durch denselben Punkt, also durch das Stromelement gehen, ergiebt sich das Resultat des Lecher'schen Versuches höchst einfach. Hiernach fällt nämlich die Wirkung des ganzen Stromteiles von Eintritt in die Drehungsaxe bis zum Austritt ($aa'bcw$ der Fig. 3a der Lecher'schen Abhandlung) vollständig fort, und zwar der Teil aa' in dem feststehenden Teil der Drehungsaxe deshalb, weil seine Kraft auf den Magneten durch die Drehungsaxe selbst geht, der Rest deshalb, weil sein Träger mit dem Magneten starr verbunden ist; die Wirkung rührt also lediglich von dem Stromteil von w bis a in dem äusseren, festliegenden Leiter her. Dieser Teil ist aber überall von dem Magneten weit entfernt, im Mittel viel weiter als bei dem Pohl'schen Versuch (Hr. Lecher führt ihn absichtlich „in weitem Bogen von w aus zur Batterie“), und ausserdem liegen beide Pole zu ihm nahezu symmetrisch, sodass die Drehungsmomente auf dieselben sich zum grössten Teil einander aufheben; die Wirkung muss also jedenfalls sehr gering sein, viel kleiner als bei dem Versuch 3b, bei welchem die Wirkungen des nächstliegenden Stromteiles auf beide Pole sich summiren; wenn also Hr. Lecher das „merkwürdige Resultat“ findet, dass „auch bei dem ersten Versuch immer eine Ablenkung eintritt, aber meist eine kleinere als im zweiten Versuch und auch im Zeichen oft *entgegengesetzt*“, so scheint mir daran durchaus nichts Merkwürdiges zu sein. Dagegen bei dem Pohl'schen Versuch (Fig. 1 der Lecher'schen Abhandlung) fällt zwar ebenfalls die Wirkung des Stromteiles in der Drehungsaxe und in dem von der Drehungsaxe zur Quecksilberrinne gehenden, mit dem Magneten starr verbundenen Arm fort, aber der übrige, in dem festliegenden äusseren

Leiter fließende Stromteil, welcher von der Rinne nach dem unteren Ende der Drehungsaxe geht, kommt dem Magneten bei der Drehung sehr nahe und wirkt vorwiegend auf den unteren Pol. Hiernach glaube ich dem Versuch des Hrn. Lecher jede Beziehung zu dem Pohl'schen Versuch absprechen zu müssen; dagegen ist er von Interesse als eine experimentelle Bestätigung der alten Annahme, dass die Kraft eines geradlinigen Stromteiles und folglich auch eines Stromelementes auf einen Pol *nicht durch den Pol, sondern durch das Stromelement geht*.

Uebrigens ist das Resultat des Hrn. Lecher, dass „bei dem Pohl'schen Versuch die Ursache der Rotation des Magneten nicht in dem in der Drehungsaxe fließenden Stromteil aa' , sondern in dem Rest z des geschlossenen Stromes zu suchen ist“, welches Resultat ihn veranlasst, den Pohl'schen Versuch und seine Erklärung als „experimentell und theoretisch falsch“ zu bezeichnen, nicht neu. Z. B. heisst es in meinem Lehrbuch der Physik (p. 300): „Aus diesem Versuch folgt, dass die Kraft eines ungeschlossenen Stromes und folglich auch eines Stromelementes auf einen Magnetpol nicht durch den Pol geht; man nimmt dieselbe als durch das Stromelement gehend an.“ Damit ist die Unwirksamkeit des in der Drehungsaxe fließenden Stromteiles bei dem Pohl'schen Versuch ohne weiteres behauptet.

Bonn, im September 1900.

(Eingegangen 4. September 1900.)

10. *Zur Theorie
der Strahlung schwarzer Körper. Kritisches;
von W. Wien.*

In der letzten Zeit sind die theoretischen und experimentellen Untersuchungen über die Strahlung schwarzer Körper Gegenstand vielfacher Erörterungen geworden. Ich möchte mich noch in kritischer Weise eingehender über diese Frage äussern als ich es in dem Bericht des internationalen Physikercongresses in Paris gethan habe.

Auf rein thermodynamischer Grundlage und auf der elektromagnetischen Lichttheorie abgeleitet ist von Boltzmann das Gesetz, dass die Gesamtstrahlung proportional der vierten Potenz der absoluten Temperatur zunimmt, und von mir das Gesetz, nach dem die Veränderung jeder Wellenlänge umgekehrt proportional der absoluten Temperatur vor sich geht.

Diese beiden Gesetze sind in ihrer Begründung¹⁾ gesichert und von der Erfahrung durchaus bestätigt.

Auch die anderen rein thermodynamischen Folgerungen, die ich aus dem Kirchhoff'schen Gesetz abgeleitet habe, können als sichergestellt angesehen werden und sind auch, soviel mir bekannt geworden ist, niemals angefochten. Nur gegen die Ausnahmestellung, die ich der magnetischen Drehung der Polarisationssebene anwies, hat sich Hr. Brillouin²⁾ in einem Aufsatz gewandt, der erst bei Gelegenheit des Pariser Congresses zu meiner Kenntnis gelangte.

1) Hr. Thiesen hat gegen die Strenge meines ursprünglichen Beweises Bedenken erhoben (Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 2. p. 37. 1900). Ich möchte hierzu bemerken, dass ich später (Wied. Ann. 52. p. 156. 1894) eine Ableitung gegeben habe, bei welcher die Rechnung mit Mittelwerten, gegen die sich die Bedenken richteten, vollständig vermieden ist.

2) Brillouin, L'éclairage électrique 15. p. 265. 1898.

Die Einwürfe des Hrn. Brillouin beruhen auf einem Missverständnis des eigentlich entscheidenden Punktes der Frage, das dadurch hervorgerufen ist, dass ich mich auf die ausführlichen Auseinandersetzungen Kirchhoff's berufen zu können glaubte und daher keine Darstellung des vollständigen Strahlenganges gegeben habe.

Ich will deshalb diesen Punkt, der mir der Aufmerksamkeit in hohem Grade würdig zu sein scheint, etwas ausführlicher behandeln.

Die Grundlage für die Ableitung des Kirchhoff'schen Satzes, auf der auch Clausius sein Gesetz von der Abhängigkeit der Strahlung vom umgebenden Medium aufbaut, ist die Thatsache, dass im Zustande des Wärmegleichgewichtes zwei schwarze Flächenelemente sich gegenseitig gleiche Mengen Energie zu senden. Befinden sich beide Elemente in demselben Medium, so findet dies immer statt, solange die sogenannte Reciprocität des Strahlenganges stattfindet, d. h. solange ein Strahl, der von einem Punkte des Elementes ds_1 nach einem Punkte des Elementes ds_2 geht, denselben Weg zurücklegt als ein von ds_2 nach ds_1 gehender. Jeder Punkt des Elementes ds_1 sendet dem Element ds_2 die Strahlenmenge zu, die in einem Kegel enthalten ist, der von dem Punkte ausgehend das Element ds_2 umspannt (Fig. 1). Nach bekannten Sätzen ist also die gesamte Strahlenmenge, die von ds_1 nach ds_2 geht,

$$e ds_1 \frac{ds_2}{r^2},$$

wenn e das Emissionsvermögen des schwarzen Körpers, r die Entfernung beider Elemente bezeichnet.

Für die von ds_2 nach ds_1 gehende Strahlung ergibt sich

$$e ds_2 \frac{ds_1}{r^2}.$$

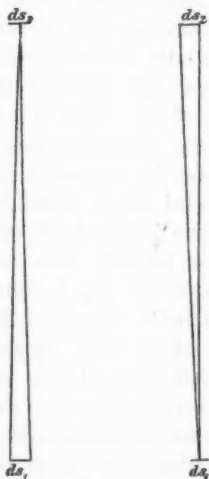


Fig. 1.

Gehen die Strahlen durch beliebige brechende Medien oder werden sie in beliebiger Weise gespiegelt, so ist r vom zurückgelegten Wege und dem Brechungsindex der Medien abhängig, aber solange die Reciprocität des Strahlenganges besteht, ist r für Strahlen, die in entgegengesetzter Richtung gehen, gleich.

Die Reciprocität des Strahlenganges hört aber auf, wenn eine elektromagnetische Drehung der Polarisationssebene eintritt.

Das von ds_1 ausgehende Strahlenbündel gehe zunächst durch ein Nicol'sches Prisma N_1 . Die total reflectirten Strahlen sollen durch einen Spiegel wieder nach ds_1 zurückgeworfen werden. Die andere Hälfte geht, linear polarisirt, durch die Platte P , wo durch magnetische Kräfte die Polarisationssebene um 45° gedreht werden soll. Weiter fallen diese Strahlen auf N_2 . Dies Nicol'sche Prisma soll so orientirt sein, dass alle diese Strahlen hindurchgehen und auf ds_2 fallen. Von den in umgekehrter Richtung von ds_2 ausgehenden Strahlen wird die in Nicol N_2 total reflectirte Strahlung zurückgelenkt. Die hindurchgehenden fallen auf P und hier wird ihre Ebene so gedreht, dass sie senkrecht steht auf der Polarisationssebene der von ds_1 kommenden, aus N_1 austretenden Strahlen. Sie können also N_1 nicht passiren, sondern werden total reflectirt, sodann vom Spiegel S_1 zurückgeworfen, wieder in N_1 total reflectirt, ebenso in N_2 , dann wieder von S_2 zurückgeworfen werden sie zum dritten Male von P gedreht und bekommen nun eine Polarisationssebene, die sie durch N_1 vollständig hindurchgehen lässt (Fig. 2). Da diese Strahlen einen längeren Weg zurückgelegt haben, als die von ds_1 nach ds_2 gehenden, so umspannt das Strahlenbündel, das bei gleicher Weglänge ds_1 umspannt haben würde, jetzt ein grösseres Flächenstück. Hier ist r für die beiden Richtungen verschieden zu setzen und wir haben für die Strahlung, die von ds_1 nach ds_2 geht,

$$e ds_1 \frac{ds_2}{r_1^2},$$

für die umgekehrt von ds_2 nach ds_1 gehende

$$e ds_2 \frac{ds_1}{r_2^2}.$$

Da ich nun r_2 beliebig gross gegen r_1 machen kann, so kann ich die zweite Strahlenmenge gegen die erste verschwinden lassen. Durch Spiegel S_3 kann ich die an ds_1 vorbeigehenden Strahlen wieder nach ds_2 zurückreflectiren. Ich kann also

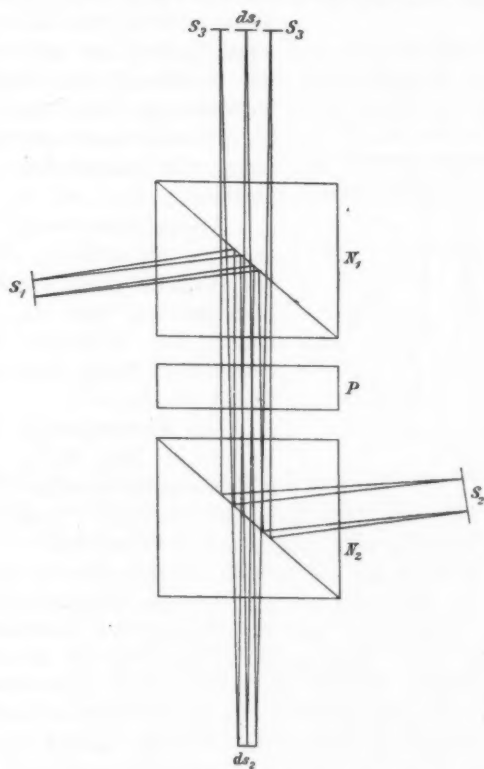


Fig. 2.

mit unbegrenzter Annäherung die Anordnung so treffen, dass ds_2 dreimal soviel Strahlung erhält als ds_1 , wie ich es früher behauptet habe.

Diese Betrachtung hat eine gewisse Analogie zu dem von Clausius gegebenen Beweis der Abhängigkeit der Strahlung vom umgebenden Medium.

Es möge (Fig. 3) ds_1 in einem optisch dünneren, ds_2 in einem optisch dichteren Medium liegen. Hier ist nun zwar die Reciprocität des Strahlenganges bei den zwischen ds_1 und ds_2 hin und hergehenden Strahlen gewahrt, aber die reciproken

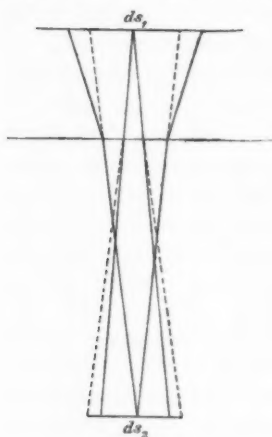


Fig. 3.

Kegel erleiden beim Uebergang von einem Medium zum anderen durch die Brechung eine verschiedene Veränderung. Der von ds_2 nach ds_1 gehende vergrößert seine Öffnung, der umgekehrte verkleinert sie.

Also gelangen weniger Strahlen nach ds_1 als nach ds_2 . Hier wird der Ausgleich durch die Annahme herbeigeführt, dass ds_2 im Verhältnis des Quadrates des Brechungsindex mehr Strahlung aussendet als ds_1 .

Das Missverständnis des Hrn. Brillouin liegt darin, dass er mit vollkommen parallelen Strahlen

operiert, was bei derartigen Betrachtungen unzulässig ist. Parallele Strahlen sind immer nur ein Grenzfall.

Hr. Planck hat die Ansicht ausgesprochen¹⁾, dass Ausbreitung der Strahlung ein umkehrbarer Vorgang sei, sobald Emission, Absorption und Zerstreuung der Strahlung ausgeschlossen wird. Dem gegenüber muss ich an meiner früher ausgesprochenen Ansicht festhalten, dass Ausbreitung der Strahlung auf einen grösseren Raum nur dann umkehrbar ist, wenn die Strahlung vermöge ihres Druckes bei der Ausbreitung das Maximum der Arbeit leistet, das sie leisten kann.

Da Hr. Planck von einem Strahlenbündel bestimmter Richtung spricht, so will ich im Folgenden ein solches betrachten. Sei ds (Fig. 4) ein schwarzes, strahlendes Element, R_1 eine vollkommen spiegelnde Halbkugel. Alle Strahlen, die von ds ausgehen, kehren wieder zu ihr zurück. Es ist dies ein Zustand, den ich als labiles Gleichgewicht der Strahlung

1) M. Planck, Ann. d. Phys. 1. p. 736. 1900.

bezeichnet habe. Denken wir uns auf ds einen vollkommenen Spiegel gelegt, so wird am Gleichgewicht der Strahlung nichts gestört, ebenso wenig, wenn der Spiegel vollkommen zerstreut. Lassen wir nun R_1 sich allmählich ausdehnen und in R_2 übergehen, so wird nach wie vor alle Strahlung nach ds zurückkehren.

Bei dieser Ausdehnung kann man eine bestimmte Menge Arbeit gewinnen, die sich aus dem elektromagnetischen Druck und der Dichtigkeit der Strahlung leicht berechnen lässt. Mit dieser Arbeit kann ich dann bei der Zusammenziehung der Kugel von R_2 auf R_1 den Druck der Strahlen wieder überwinden und den Anfangszustand wiederherstellen.

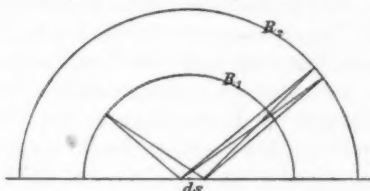


Fig. 4.

Wenn ich dagegen R_1 plötzlich beseitige und die Strahlung sich bis R_2 ausdehnen lasse, so wird ein neuer Gleichgewichtszustand hergestellt, bei dem die Strahlung nicht dieselbe Dichte hat, als wenn ds mit der ursprünglichen Temperatur gegen R_2 strahlen würde. Es entspricht dies einer Temperaturerniedrigung, für die keine Compensation geleistet ist. Der Vorgang ist also nicht umkehrbar. Hierbei ist keine Emission, Absorption oder Zerstreuung der Strahlen eingetreten.

Die Energieverteilung im Spectrum der Strahlung eines schwarzen Körpers lässt sich nach unseren bisherigen Kenntnissen der Eigenschaften der Körper aus rein thermodynamischen Betrachtungen nicht gewinnen. Gegen einen Versuch¹⁾, aus gastheoretischen Hypothesen die Emissionsfunction abzuleiten, sind zwei Einwürfe erhoben worden.²⁾

Ich hatte angenommen, dass jedes Molecül nur Strahlen einer Wellenlänge aussendet und dass die Strahlung pro-

1) W. Wien, Wied. Ann. 58. p. 662. 1896.

2) O. Lummer u. E. Jahnke, Ann. d. Phys. 3. p. 283. 1900.

portional zu setzen ist der Anzahl der diese Schwingungen aussendenden Molecüle. Nun hängt die Strahlung eines schwarzen Körpers nicht von der Natur der die Strahlung herstellenden Molecüle ab. Also dürfte auch die Anzahl der strahlenden Molecüle nicht in Frage kommen. Ich habe hiergegen schon in meinem Pariser Referat bemerkt, dass die Anzahl der Molecüle durch den zweiten Hauptsatz notwendig wird, weil die Irreversibilität und damit die Herstellung des Wärmegleichgewichtes nur erst durch das Zusammenwirken einer grossen Anzahl von Molecülen hervorgerufen wird. Bei einer geringen Anzahl würde sich überhaupt kein Gleichgewichtszustand der Strahlung herstellen. Der zweite Einwand bezieht sich darauf, dass bei der Anwendung des Maxwell'schen Verteilungsgesetzes ein die Temperatur enthaltender Factor fortgelassen ist.

Ich habe die Begründung für das Fortlassen dieses Factors nicht gegeben, weil dieselbe ausserordentlich einfach ist. Ich will nun, da hieraus ein Einwand gegen die Ableitung meines Gesetzes gemacht ist, etwas näher darauf eingehen.

Wenn man den Factor beibehält, so erhält man, wie die Herren Lummer und Jahnke richtig bemerken, die Formel

$$E_{\lambda} = \frac{C}{\lambda^2 \cdot \vartheta^2} e^{-\frac{c}{\lambda \vartheta}}.$$

Nun müssen aber, wie ich früher gezeigt habe¹⁾, alle Formeln verworfen werden, die zu einer Curve führen, die steiler gegen die Abscissenaxe abfällt, wie die Curve

$$\frac{\text{const.}}{\lambda^5}.$$

Es darf nämlich die Energie einer bestimmten Wellenlänge nicht sinken, wenn die Temperatur steigt. Dies würde aber bei der obigen Formel der Fall sein. Von einer bestimmten Temperatur an würde E mit weiter steigender Temperatur kleiner werden. Dass aber E mit steigender Temperatur nicht sinken darf, ist eine ebenso notwendige thermodynamische Folgerung, wie das Stefan'sche Gesetz und das Verschiebungsgesetz, die für die Feststellung der Formel herangezogen sind.

1) W. Wien, Wied. Ann. 52. p. 159. 1894.

Das Fortlassen des Factors $(\lambda \vartheta)^{-\frac{1}{2}}$ ist daher thermodynamisch wohlbegründet. Weshalb dadurch der physikalische Sinn des Maxwell'schen Verteilungsgesetzes verloren gehen soll, habe ich nicht verstehen können.

Ich setze die Strahlung bei einer constant gehaltenen Temperatur der Anzahl der strahlenden Molecüle proportional. Es folgt dann das Gesetz, das ich abgeleitet habe, sobald eben alle thermodynamisch begründeten Gesetze erfüllt werden sollen. Dies ist ganz unabhängig von der Temperatur, von der ich ausgehe, und wenn nun mit Rücksicht auf die thermodynamischen Gesetze der Factor, der die Temperatur enthält, wegfällt, so bedeutet das physikalisch, dass die Strahlung ausser der Anzahl der Molecüle noch einer bestimmten Temperaturfunction proportional sein muss, damit sie bei jeder Temperatur der Anzahl der Molecüle proportional sei. Das ist aber keine neue Hypothese, sondern durch die thermodynamischen Gesetze gefordert.

Ich möchte hierbei noch bemerken, dass ich niemals die Begründung meines Gesetzes für zwingend angesehen habe, was schon durch die Notwendigkeit der Einführung uncontrolirbarer Hypothesen ausgeschlossen ist. Ich habe im Gegenteil ausdrücklich ausgesprochen, dass ich durch die Prüfung des Gesetzes an der Erfahrung umgekehrt einen Einblick in die Moleculartheorie erwartete.

Auf die übrigen Erörterungen der Arbeit von Lummer und Jahnke einzugehen, halte ich insofern für unnötig, als es sich darin ausschliesslich um die Aufstellung rein empirischer Formeln handelt.

Was nun die Vergleichung des eben besprochenen Strahlungsgesetzes mit der Erfahrung betrifft, so ist die Uebereinstimmung für kürzere Wellen eine so gute, dass dieselbe nicht mehr als zufällig angesehen werden kann. Für längere Wellen haben sich Abweichungen gezeigt.¹⁾ Ich muss nun zunächst hervorheben, dass ich immer noch, im Gegensatz zu Hrn. Planck²⁾, an der früher geäusserten Ansicht³⁾ festhalte, dass

1) Wenn sich solche Abweichungen bei einer bestimmten Temperatur zeigen, so folgt aus meinem Verschiebungsgesetz, dass sie mit steigender Temperatur zu immer kleineren Wellenlängen vorrücken.

2) M. Planck, Ann. d. Phys. 1. p. 725. 1900.

3) W. Wien, Wied. Ann. 49. p. 633. 1893.

kurze und lange elektromagnetische Wellen nicht nur einen quantitativen Unterschied in ihren Beziehungen zur Wärmestrahlung darstellen. Bei der Absorption ist jetzt wohl allgemein angenommen, dass diese bei längeren Wellen durch einen einzelnen Vector, oder, was dasselbe bedeutet, unter Voraussetzung der Continuität der Materie dargestellt wird, dass dagegen bei kürzeren Wellen der Einfluss der Molecularconstitution der Körper von Einfluss ist. Ganz dasselbe muss auch für die Emission gelten. Ich halte es daher von vornherein für unwahrscheinlich, dass ein Strahlungsgesetz, das sich auf molecularen Hypothesen aufbaut, auch für sehr lange Wellen noch gültig bleiben soll. Die Uebereinstimmung mit der Erfahrung für kurze Wellen spricht offenbar dafür, dass die gemachten Voraussetzungen bei nicht zu langen Wellen annähernd zutreffen.

Mit Rücksicht hierauf halte ich es für wenig aussichtsvoll, ein allgemein gültiges Strahlungsgesetz auf molecularen Hypothesen aufzubauen, solange eine rein thermodynamische Ableitung unmöglich ist. Es scheint mir vielmehr die Meinung des Hrn. Paschen, die er mir brieflich mitgeteilt hat, zunächst mehr zu versprechen, die Darstellung des Strahlungsgesetzes für lange Wellen, unabhängig von dem für kürzere Wellen gültigen, zu versuchen, ebenso wie man für langsame elektrische Schwingungen andere Formeln braucht als für sehr schnelle.

Hr. Planck¹⁾ hat in einer auf der Resonanz eines elektrischen Dipols begründeten Theorie einen Ausdruck für die elektromagnetische Entropie abgeleitet, aus dem das von mir aufgestellte Strahlungsgesetz folgt.

Ich habe gegen diese Ableitung schon in meinem Pariser Bericht zwei Bedenken erhoben. Erstens fehlt der Nachweis, dass die eingeführte Hypothese der natürlichen Strahlung die einzige ist, die zur Irreversibilität führt. Es bleibt daher zweifelhaft, ob die betrachteten Vorgänge mit der Wärmestrahlung überhaupt etwas zu thun haben. Dann werden bei der Ableitung des Ausdruckes für die Entropie die strahlenden Resonatoren als unabhängig voneinander angenommen. Anderer-

1) M. Planck, Ann. d. Phys. 1. p. 69 u. p. 719. 1900.

seits beruht die Ableitung darauf, dass mehrere Resonatoren vorhanden sind. Hierin scheint mir ein Widerspruch zu liegen. Sollten diese beiden Lücken sich noch ausfüllen lassen, so wäre die Planck'sche Theorie streng thermodynamisch begründet.

Endlich möchte ich noch eine Bemerkung von Lord Rayleigh¹⁾ besprechen, die er gegen mein Strahlungsgesetz gemacht hat, dass nämlich die Strahlung bei unendlich wachsender Temperatur gegen eine bestimmte Grenze convergirt.

Das ist allerdings der Fall, dafür wird dann aber die Energie in der Nähe der Wellenlänge Null unendlich gross, d. h. es tritt schliesslich nur noch eine Steigerung der Intensität der ganz kurzen Wellenlängen auf, während die längeren Wellen nicht mehr zunehmen. Die Steigerung der Gesamtemission folgt nach wie vor dem Stefan'schen Gesetz.

Dass bestimmte Wellenlängen nicht mehr zunehmen, ist übrigens nach dem Gesetz für jede Temperatur der Fall. Es sind das die Wellenlängen, bei denen $c/\lambda \vartheta$ sehr klein ist. Hiernach sind Strahlen von sehr grosser Wellenlänge überhaupt bei keiner Temperatur über eine gewisse Intensität hinaus zu erreichen, was die Erfahrung bisher bestätigt hat. Einen Einwurf gegen mein Gesetz kann ich in diesem Verhalten nicht finden.

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 49. p. 539. 1900.

(Eingegangen 12. October 1900.)

11. *Notiz über die Ursachen
der secularen Variationen des Erdmagnetismus;
von P. S. Wedell-Wedellsborg.*

Es ist durch die Untersuchungen F. Exner's und anderer bewiesen, dass die Erde eine bedeutende, negative elektrische Ladung besitzt. Durch directe Versuche von H. A. Rowland und durch Induction aus bekannten elektromagnetischen Erscheinungen ist bewiesen, dass ein rotirender, elektrischer Körper ein Magnetfeld hervorbringt. Ferner ist bekannt, dass Eisen und Nickel, wenn sie sich in der Nähe der kritischen Temperaturen ihres Magnetismus befinden, auch von sehr schwachen Magnetfeldern magnetisirt werden. Demzufolge wird die Rotation der Erde ein Magnetfeld hervorbringen, dessen Axe mit der Erdaxe zusammenfällt, und dessen Sinn mit dem thatsächlichen Sinne des Erdmagnetismus übereinstimmt. Bekanntlich fällt aber die Magnetaxe der Erde nicht genau mit ihrer Rotationsaxe zusammen, sondern bildet mit derselben einen Winkel von ungefähr 20° , und überdies dreht sie sich langsam um die Rotationsaxe der Rotation entgegen. Beide magnetischen Pole wandern also immer langsam gegen Westen.¹⁾

Die Ursachen dieser Erscheinung kann man in den Beobachtungen und Theorien von Adam Paulsen suchen.²⁾

Dieser Forscher hat experimentell bewiesen, dass die Sonnenfleckenstrahlen elektrische Ströme auf der Erde hervorrufen, und dass diese Ströme etwa folgenden Verlauf zeigen: Von den Aequatorialgegenden, wo die elektrische Energie durch Insolation entsteht, geht der positive Strom abwärts

1) Vgl. Lord Kelvin, *Popular Lectures and Addresses* 3. p. 25.

2) Adam Paulsen, *Oversigt Kgl. Danske Vid. Forh.* 1894. p. 162.

durch die Erde und auf höheren Breiten wieder aufwärts, während die negative Strömung von niederen Breiten in den höchsten Schichten der Erdatmosphäre gegen die Polargegenden verläuft. Diese Ströme haben offenbar eine tägliche Periode, weil ihre elektromotorische Kraft durch Insolation entsteht: nehmen wir an, dass diese Ströme am Tage bedeutend stärker sind als der Nacht, dann bilden sie auf jeder Hemisphäre ein halbringförmiges Solenoid, welches immer auf der Tagseite der Erde liegt, und dessen Magnetkraftlinien auf der nördlichen Halbkugel von West nach Ost, auf der südlichen von Ost nach West verlaufen: die magnetischen Pole der Erde liegen immer ausserhalb dieser Solenoide (nämlich tief in der Erde) und werden sich am Tage im schwächsten Teil der Solenoidenfelder, der Nacht im stärkeren Teil befinden: folglich bekommen sie jede Nacht Antriebe gegen Westen und werden sich also langsam gegen Westen bewegen. Um die Wahrheit der Paulsen'schen Theorie hervortreten zu lassen, führe ich noch einige Citate an: Es ist allgemein angenommen, dass die Strahlen der Sonnenflecken von den höchsten Schichten der Erdatmosphäre absorbirt werden und dadurch elektrische Energie hervorrufen, welche sich alsbald in Polarlichter, elektrische und magnetische Stürme etc. umsetzt. Evershed¹⁾ und Ricco²⁾ halten die Sonnenfleckenstrahlen für hochtemperirtes kurzwelliges Licht, und solches hat bekanntlich die Eigenschaft, elektrische Energie hervorzurufen, wenn es von Gasen absorbirt wird. Wenn wir annehmen, dass die höchsten Schichten der Erdatmosphäre gegenüber der Erdrotation durch Attraction des Mondes retardirt sind, so werden die dort entstandenen elektrischen Massen eine westliche Bewegung im erdmagnetischen Felde haben, und folglich geht die positive Elektrizität abwärts, die negative aufwärts und gegen die Pole. C. Meldrum³⁾ hat 1873 die Beobachtung publicirt, dass Sonnenflecken in den Tropen starke Cyclone und Niederschläge hervorbringen, und da elektrische Luft die Eigenschaft hat, gesättigten Wasserdampf zu verdichten, so zeigt

1) Evershed, *Astroph. J.* Chicago, April 1897. p. 296.

2) Ricco, *l. c.* August 1897. p. 91—94.

3) C. Meldrum, *Proc. Roy. Soc.* 21. p. 297. 1873.

dies eine abwärtsgehende Strömung von Elektrizität an. Dass es in der That die positive Elektrizität ist, welche auf niederen Breiten abwärts strömt, beweist auch die Beobachtung Paulsen's, dass das Potential der niederen Luftschichten in den Polargegenden negativer ist, als unter Aequatorgegenden, wo also die negative Elektrizität der Erde von der abwärtsgehenden positiven Elektrizität zum Teil neutralisirt wird.

Kopenhagen, September 1900.

(Eingegangen 4. October 1900.)

12. *Eine einfache Modification des Wehnelt'schen Unterbrechers; von J. v. Palltch.*

(Aus dem akademischen Anzeiger d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien, Nr. XII, Sitzung vom 3. Mai 1900.)

Der nachfolgend beschriebene Unterbrecher ist sehr einfach und billig herzustellen und trotzdem sehr wirksam; er bietet sogar vor den bisher construirten Ausführungen mehrere Vorteile.

Als negative Elektrode dient ein 3—5 mm dicker, blanker Kupferdraht, der in ein ungefähr 20 cm langes Glasröhrchen so weit hineingesteckt ist, dass unten noch ein 2—3 cm langes Stück desselben hervorragt; als positive Elektrode dient ein 1—2 mm dicker *Stahldraht*, der gleichfalls von einem Glasröhrchen umgeben ist, dessen untere Mündung jedoch an der Gebläselampe so weit verengt ist, dass der Stahldraht eben noch hindurchtreten kann. Dieser Teil muss, weil heftigen Erschütterungen ausgesetzt, sehr stark gemacht werden. Am oberen Ende geht der Stahldraht mit sanfter Reibung durch ein Korkstück hindurch, dessen Bohrung oben mit einer napfförmigen Erweiterung versehen ist. Letztere dient zur Aufnahme eines Tropfens Quecksilber zum Zwecke der Stromzuleitung. Beide Glasröhrchen werden nun parallel zueinander durch einen Kautschukstopfen gesteckt, der in den Hals einer Flasche (eines $\frac{1}{2}$ Liter-Kolbens) versenkt ist, welche den Elektrolyt (gut leitende verdünnte Schwefelsäure von 1,2 spec. Gewicht) bis auf 3 cm unterhalb des Stopfens enthält. Seitliche Einkerbungen des Stopfens gestatten ein Zurückfließen des Elektrolyten, wenn derselbe infolge hoher Betriebsspannung aus der Röhre mit dem Stahldrahte übersteigen sollte. Das Ganze wird zur Kühlhaltung in eine grössere Wanne mit kaltem Wasser eingetaucht. Die Glasröhrchen sollen bis einige Centimeter in den Elektrolyten hinabreichen, wobei das die Anode enthaltende Röhrchen etwas tiefer eintauchen soll, als das andere. Vor dem Versuche zieht man den Stahldraht weiter in die Höhe, was den Widerstand vermehrt, und senkt ihn dann

nach Stromschluss allmählich tiefer, bis das eingeschaltete Ampèremeter die passende Stromstärke anzeigt oder bis die gewünschte Funkenlänge und Frequenz der Unterbrechungen erreicht ist. Ein besonderer Vorschaltwiderstand ist dabei meist ganz entbehrlich. Sobald die Stahlspitze so weit verzehrt ist, dass die Wirkung abnimmt, senkt man dieselbe wieder tiefer ein. Es gelingt so leicht, die Wirkung stundenlang constant zu erhalten. Der Stahldraht hat sich unter den versuchten Elektroden am besten bewährt; ein Kupferdraht würde zu rasch angegriffen werden, und einem Platindrahte gegenüber hat der Stahldraht wegen seiner Billigkeit den Vorzug. Durch die elektrolytische Wirkung bildet sich an der verengten Mündung der Glasröhre am Stahlstäbchen in kurzer Zeit eine Einschnürung aus, welche für die Wirkung des Apparates vorteilhaft erscheint, da dadurch die Verdampfung energischer zu stande kommt. Es scheint von der activen Stahlspitze dieser eingeschnürte Teil die Hauptwirkung auszuüben, während der tiefer eintauchende Teil derselben nur einen Teil der Stromführung vermittelt. Der beschriebene Unterbrecher fand vorteilhafte Anwendung beim Durchleuchten von grossen Geissler'schen Röhren, von Röntgenapparaten, beim Experimentiren mit Blitzröhren und Blitztafeln etc. Für Röntgenröhren ergab, bei einer Schlagweite des Inductoriums von 15 cm, eine Spannung von 60 Volt die besten Resultate. Bei höherer Spannung (bis 100 Volt) nahm die Wirkung, besonders bei stark evacuirten Röntgenbirnen, wieder ab. Beim Nichtgebrauche wird der Stahldraht ganz herausgenommen.

(Eingegangen 7. September 1900.)

